

تعریف: رابطه‌های ترتیبی یا ترتیب جزئی

اگر A یک مجموعه نامتناهی و R یک رابطه بر مجموعه A باشد، طوری که دارای خواص زیر باشد و همچنین وقتی R را به صورت (A, R) نمایش دهیم، آن را یک مجموعه مرتب یا جزئی‌ترتیب (یا poset) می‌نامیم.

مثال ۱: بر مجموعه اعداد صحیح، رابطه R که به صورت $n \leq m$ تعریف شده است، یک رابطه ترتیبی است.

$$\forall n \in \mathbb{R}, n \leq n \quad \text{مندی خاصیت}$$

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, n \leq y \text{ و } y \leq n \Rightarrow n = y \quad \text{مندی خاصیت}$$

$$\forall n, y, z \in \mathbb{R}, n \leq y \text{ و } y \leq z \Rightarrow n \leq z \quad \text{مندی خاصیت}$$

در این صورت $(\mathbb{R}, \leq)$ یک مجموعه مرتب است.

مثال ۲: آیا مجموعه اعداد صحیح، رابطه R که به صورت $n R y \Leftrightarrow n^2 = y^2$ تعریف شده است، یک رابطه ترتیبی است؟

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, n R y \Leftrightarrow n^2 = y^2$$

حل:

$$n R y \Rightarrow n^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm n$$

$\Rightarrow R$ مندی خاصیت نیست

$$2 R -2, -2 R 2, 2 \neq -2 \Rightarrow R \text{ رابطه ترتیبی نیست.}$$

مثال ۳: آیا مجموعه اعداد طبیعی، رابطه R که به صورت $n R y \Leftrightarrow n | y$ تعریف شده است، یک رابطه ترتیبی است؟

$$\forall n, y \in \mathbb{N}, n R y \Leftrightarrow n | y$$

بازتاب است

$$\forall n \in \mathbb{N}, n = 1 \times n \Rightarrow n | n$$

$$\forall n, y \in \mathbb{N}, n | y \text{ و } y | n \Rightarrow n = y$$

$$n | y \Rightarrow \exists a \in \mathbb{N} \exists y = a \times n$$

$$\frac{1}{b} \Delta \quad y \mid n \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N} \ni n = b \times y \Rightarrow n = b \times (a \times n) = (a \cdot b) n$$

$$\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 = ab \\ a, b \in \mathbb{N} \end{array} \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow n = b \times y = 1 \times y = y$$

$$\Rightarrow n = y$$

$$\Rightarrow R \text{ صدقاً بر } 1 \text{ است}$$

$$\forall n, y, z \in \mathbb{N}, n \mid y, y \mid z \stackrel{?}{\Rightarrow} n \mid z$$

$$n \mid y \Rightarrow \exists a \in \mathbb{N} \ni y = a \times n \Rightarrow z = b \times y = b \times (a \times n)$$

$$y \mid z \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N} \ni z = b \times y$$

$$\Rightarrow z = (a \cdot b) n \Rightarrow z = c n \Rightarrow n \mid z \Rightarrow R \text{ صدقاً است}$$

$$\text{پس } (N, \mid) \text{ یک مجموعه مرتب است}$$

مثال ۱ اثر M مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد $(M, \subseteq)$ یک مجموعه مرتب است

$$\forall A \in M, A \subseteq A \Rightarrow \text{خودمانی است}$$

$$\forall A, B \in M, A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B \Rightarrow \text{صدقاً بر } 1 \text{ است}$$

$$\forall A, B, C \in M, A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow \text{ترتیب است}$$

مثال ۱ بر مجموعه $\{0, 1, 2, 3\}$ که اعداد از ۰ تا ۳ زیرترتیب است

$$R_1 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$\forall n, y \in \{0, 1, 2, 3\}, n R_1 y \Leftrightarrow n = y$$

براحتی ثابت شود رابطه تساوی همه خواص رابطه ترتیب را دارد پس $(R_1, \{0, 1, 2, 3\})$ یک مجموعه مرتب است.

$$R_2 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$2 R_2 3, 3 R_2 2, 2 \neq 3 \Rightarrow R_2 \text{ صدقاً بر } 1 \text{ نیست}$$

$$R_3 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

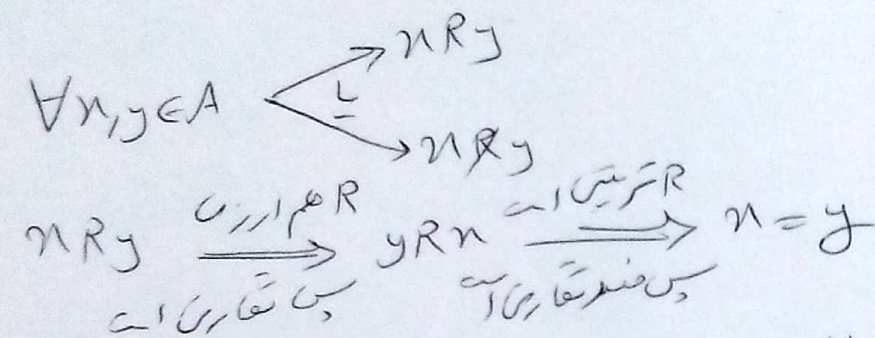
$$R_3 \text{ رابطه ترتیب نیست} \Rightarrow R_3 \text{ زیرترتیب نیست}$$

$$R_4 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$$

$$R_5 = \{ (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (0,1), (1,2), (2,3), (0,2), (1,3) \}$$

R_5 هندقیسی است $\Rightarrow R_5$ راجع ترتیبی است

مثال: ثابت کنید هر راجع ترتیبی که هم ارز و نیز راجع است، حلاً اثر A یک مجموعه نهایی R که راجع هم ارز و هم هندقیسی ترتیبی در A نه داریم.



$$\Rightarrow \forall n, y \in A, NR_y \Rightarrow n=y$$

قرار داد نگارش و از آنجا که آشنا تر است ترتیب جزئی بر مجموعه اعداد حقیقی است،

معمولاً دو مجموعه مرتب دیگر را هم با هم مقایسه می‌کنیم. (مثلاً $(\mathbb{Q}, \leq)$ و $(\mathbb{R}, \leq)$ را). منظور از راجع ترتیبی بر مجموعه S این است که در حالتی که S مجموعه اعداد حقیقی است، تعریف و اعداد مقایسه پذیر. اگر (A, R) یک مجموعه مرتب باشد، دو عضو دلخواه x, y در A را مقایسه می‌کنیم. یا قابل مقایسه نامیم. هرگاه $yRn \subseteq NRy$ و در نتیجه این صورت آن دو عضو را غیر قابل مقایسه می‌نامیم.

مثال ۱: در مجموعه مرتب $(\mathbb{N}, \leq)$ ، $n=2$ و $y=6$ دو عضو مقایسه پذیر هستند. $n=1$ و $y=16$ دو عضو غیر قابل مقایسه می‌باشند.

تعریف: ترتیب کامل یا ترتیب هم total order

اثر (A, R) یک مجموعه مرتب باشد معنوی هر دو عنصر a, b را $a R b$ یا $a < b$ می‌گویند. R قابل مقایسه باشد و R یک ترتیب کامل یا ترتیب تمام A بر مجموعه A است. در این صورت (A, R) یک مجموعه کاملاً مرتب یا مرتب تمام و یا یک زنجیر نامیده می‌شود.

مثال ۱. $(\mathbb{R}, \leq)$ یک مجموعه کاملاً مرتب است.

مثال ۲. $(\mathbb{Q}, \leq)$ ، $(\mathbb{A}, \leq)$ و $(\mathbb{N}, \leq)$ همگی مجموعه کاملاً مرتب نیستند.

مثال ۳. $(\mathbb{Z}, \leq)$ یک مجموعه کاملاً مرتب است.

توضیح: اگر (A, R) یک مجموعه مرتب باشد و X یک مجموعه مرتب باشد و (X, R) هم یک مجموعه مرتب باشد و همچنین اثر (A, R) یک مجموعه کاملاً مرتب باشد، (X, R) نیز چنین است.

مثال ۴. از آنجایی که $(\mathbb{N}, \leq)$ یک مجموعه مرتب است پس $(\mathbb{N}_e, \leq)$ نیز یک مجموعه مرتب است و همچنین از آنجایی که $(\mathbb{R}, \leq)$ یک مجموعه کاملاً مرتب است پس $(\mathbb{Q}, \leq)$ نیز مجموعه کاملاً مرتب است.

$(\mathbb{R}, \leq)$ مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

مثال ۵. اثر (A, R) یک مجموعه مرتب و (B, S) نیز یک مجموعه مرتب دیگر باشد، یک یک به یک نگاشت $f: A \rightarrow B$ را مرتب کرد.

$$\forall (m, n), (z, t) \in A \times B \quad (m, n) \sim (z, t) \Leftrightarrow m R z, n S t$$

$$\forall (m, n) \in A \times B \quad \left\{ \begin{array}{l} (A, R) \Rightarrow m R n \\ (B, S) \Rightarrow n S m \end{array} \right\} \Rightarrow (m, n) \sim (n, m)$$

رابطه $\sim$ بازتابی است.

$$(m, n) \sim (z, t) \Rightarrow (m, n) \sim (z, t) \Rightarrow (m, n) \sim (z, t)$$

$$(m, n) \sim (z, t)$$

$$(x, y) \sim (z, t) \Rightarrow \begin{matrix} x R z & y S t \\ z R x & t S y \end{matrix} \Rightarrow x = z, y = t \quad \leftarrow R, S \text{ منتهی قسری}$$

$$\Rightarrow (x, y) = (z, t) \Rightarrow \text{رابطه منتهی قسری}$$

$$\forall (x, y), (z, t), (e, f) \in A \times B \quad (x, y) \sim (z, t), (z, t) \sim (e, f) \Rightarrow (x, y) \sim (e, f)$$

$$(x, y) \sim (z, t) \Rightarrow \begin{matrix} x R z & y S t \\ z R x & t S y \end{matrix} \quad (z, t) \sim (e, f) \Rightarrow \begin{matrix} z R e & t S f \\ e R z & f S t \end{matrix} \Rightarrow x R e, y S f \quad \leftarrow R, S \text{ منتهی قسری}$$

$$\Rightarrow (x, y) \sim (e, f) \Rightarrow \text{رابطه منتهی قسری}$$

رابطه فوق (ترتیب) حاصل قسری می نامند.

البته اگر R و S هر دو نام باشند، حالت کلی به لزوماً نام نیست.
 طبق می ل اثر $(R, S) = (A, R) = (B, S)$ در این صورت

$$\forall (x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \sim (z, t) \Leftrightarrow x \leq z, y \leq t$$

مثلاً $(1, 2)$ و $(3, 4)$ با هم قابل مقایسه نیستند.

مثال: علاوه بر ترتیب حاصل قسری در $A \times B$ در صورتیکه $(B, S), (A, R)$ هر دو مجموعه ها مرتب باشند (تو) ترتیب دیگری با استوار است و در $A \times B$ تعریف کرد که ترتیب حاصل قسری یا لغت نامه می نامیم.

$$\forall (x, y) \in A \times B : (x, y) T (z, t) \Leftrightarrow \begin{cases} x R z \\ y S t \end{cases}$$

ناتمامی خود که رابطه حاصل قسری ترتیب در $A \times B$ است (۲) و همچنین اثر (A, R) و (B, S) هر دو مجموعه ها کاملاً مرتب باشند

در این صورت $(A \times B, T)$ نیز یک مجموعه کلا مرتب است (مثلاً) و این را می توانیم به عنوان فضای مرتب R^2 در نظر بگیریم. اگر (A, R) و (B, S) دو فضای مرتب باشند، حاصل مرتب $(A \times B, T)$ را می توانیم به عنوان فضای مرتب تعریف کنیم.

اگر (A_1, R_1) ، (A_2, R_2) ، ... و (A_n, R_n) فضای مرتب باشند، آنگاه $\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ را می توانیم به عنوان فضای مرتب تعریف کنیم:

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$(x_1, \dots, x_n) T (y_1, \dots, y_n) \iff \begin{cases} x_1 R_1 y_1 \\ x_2 R_2 y_2 \\ \vdots \\ x_n R_n y_n \end{cases}$$

و نامیده می شود که اگر تک تک (A_i, R_i) ها را بگیریم، آنگاه $(\prod_{i=1}^n A_i, T)$ نیز یک فضای مرتب کلا می باشد.

قابل ذکر است که ترتیب قاعده مرتب (را می توان) در مرتب کردن، مطلقاً نامعین و نامرتب است. مرتب کردن، بسته به معیار مرتب کردن، می تواند متفاوت باشد. به عنوان مثال، اگر X و Y دو درخت n و m باشند، $X R Y$ اگر و تنها اگر X از Y بزرگتر باشد.

$$X = x_1, x_2, \dots, x_n, Y = y_1, y_2, \dots, y_m$$

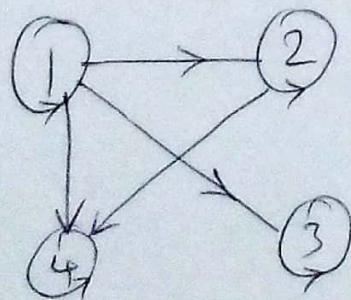
$$X = x_1, x_2, \dots, x_n, Y = y_1, y_2, \dots, y_m$$

$$X = x_1, x_2, \dots, x_n, Y = y_1, y_2, \dots, y_m$$

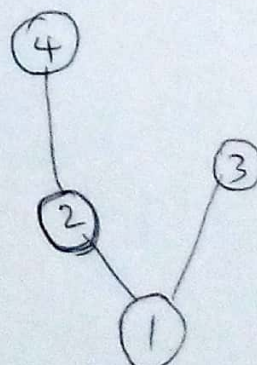
که در آن $x_{i+1} \leq y_{i+1}$

بطور مثال، در فرآیند لغت کلمه کتاب، قبل از کتابخانه و کلمه آمار، قبل از آمار است و کلمه داننا قبل از کتاب است.

برای خلوت کردن در هر دو گره که در هر دو رابطه عاوی نمودار عاوی یا عاوی
استفاده می کنیم در این نمودار اگر C گره رابطه R بر مجموعه A باشد
از آنجا که R تریتس است پس aRb و bRc از رسم یال مستقیم
از a به c صرف نظر کنیم
ناتمامی است (شاید) اگر aRb یا bRc را به واسطه وصلی کند (اینجا) می کنیم
که رأس a پایین تر از رأس c قرار گیرد و در این صورت از رسم فلش یا
یکبار روی یال a صرف نظر کنیم
با این سه شرط (یعنی اینکه R تریتس است پس دستور طومار رسم نمی شود
و اگر (وزن) قابل ترکیب داشته باشد) گره ها است حتماً ترکیب آنها را
وجود دارد پس اینجا هر رسم یال برآورد جای که ترکیب آنها منجر به خاصیت گره
قابل تریتس است نمی باشد و همچنین باید رسم فلش روی یال رأس
موضوع مؤلفه اول را a و c تریتس رأس موضوع مؤلفه دوم می کنیم
به حد قابل ملاحظه از نمودار ساده تر و قابل فهم تر شود منظور مثال
آثر R رابطه شمارج بر مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ باشد



نمودار معمولی رابطه R



نمودار عاوی رابطه R

بنابرین در نمودار عاویس لا حاصل از بُعد n و طوق عا حذف
 می شوند و جهت یا الیها به سمت بالا است و به بعد نمودار عاویس،
 تصویر قابل لعس از یک رابطه ارائه می شود و به بعد آن می توانیم
 معادله ریاضی مربوط به ترتیب را بهتر تشریف کرد.

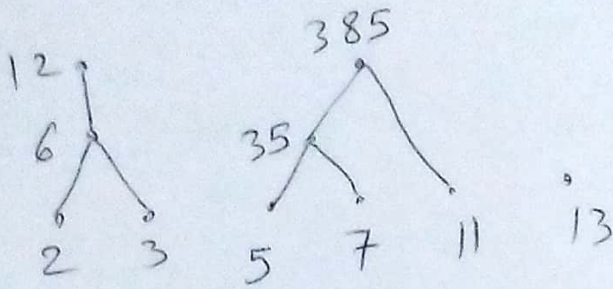
حقیقتاً اثر (A, R) یک مجموعه مرتب باشد، نمودار عاویس $(A, \bar{R})$
 از جهتش 180° نمودار عاویس (A, R) حاصل می شود.

140

مسئله افودا، عاوی را خرد (A و) رسم کنید عرّاه.

$$A = \{2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 35, 385\}$$

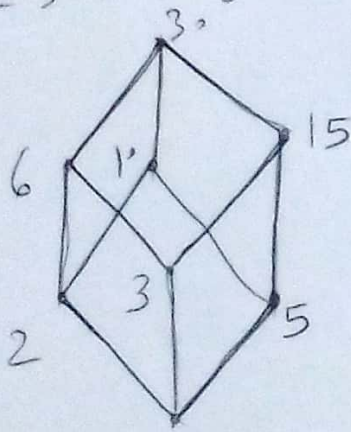
حل 1



مسئله افودا، عاوی را خرد (A و) رسم کنید عرّاه.

$$D_{30} = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ مجموع کسری های عدد } 30 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

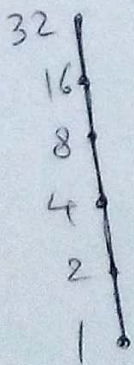
حل 1



مسئله افودا، عاوی را خرد (A و) رسم کنید عرّاه.

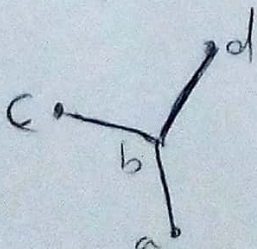
$$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$$

حل 1



عبر زده ها مرتب

مسئله افودا، عاوی را خرد (A و) رسم کنید عرّاه.



$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (d, d)\}$$

اگر (A, R) و (B, S) دو مجموعه مرتب باشند تابع $f: A \rightarrow B$ را یک
ایزومورفیسم یا ایزومورفیزم از A به B می نامیم هرگاه

ارگانه f یک تناظر در دو مجموعه مرتب یک به یک و پوشا باشد.

$$\forall x, y \in A, \quad xRy \iff f(x)Sf(y)$$

به عبارتی هر تناظر در دو مجموعه مرتب، اصف کند که یک ایزومورفیسم از B به A باشد.
نمونه در این صورت مجموعه های مرتب A, B را ایزومورفیسم
ایزومورف می نامند.

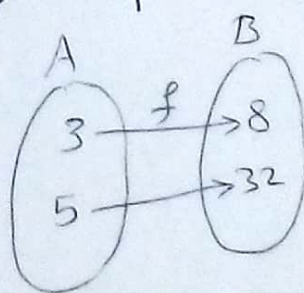
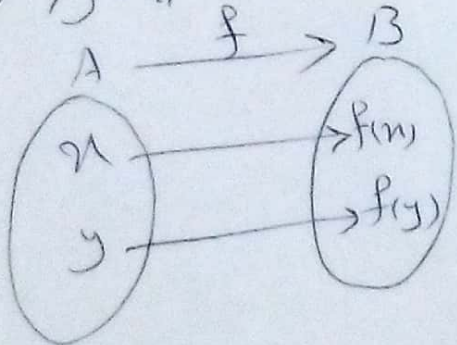
مثال ۱، مجموعه های $(\mathbb{N}, \leq)$ و $(\{2^n\}_{n=1}^{+\infty}, \leq)$
دو مجموعه مرتب ایزومورف هستند.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \{2, 4, 8, 16, \dots\}$$

$$f(n) = 2^n$$

یک به یک و پوشا بین تناظر در دو مجموعه مرتب از طرف

$$\forall n, y \in \mathbb{N}, \quad n \leq y \iff 2^n \leq 2^y$$



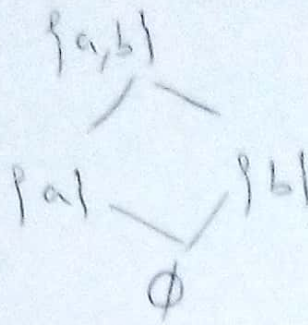
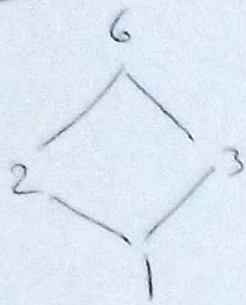
$$\begin{array}{ccc} 3 & \leq & 5 \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ 8 & & 32 \end{array} \quad \begin{array}{l} f(3) = 8 \\ f(5) = 32 \\ 8 \mid 32 \end{array}$$

مثال ۱، $(\mathbb{P}(\{a, b\}), \subseteq)$ و $(D_6, \mid)$ دو مجموعه مرتب ایزومورف هستند.

$$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$\mathbb{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

147



$$f: D_6 \rightarrow \mathcal{P}(\{a, b\})$$

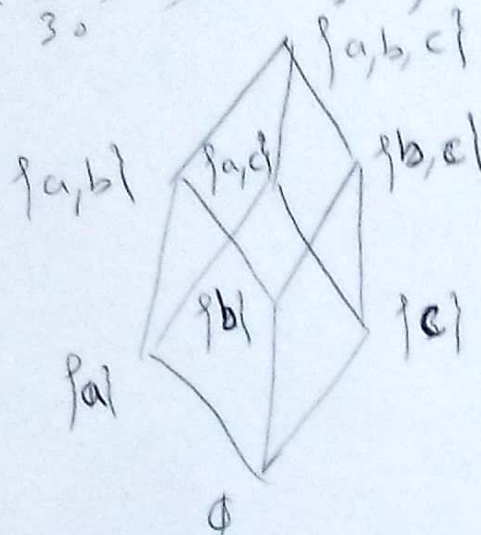
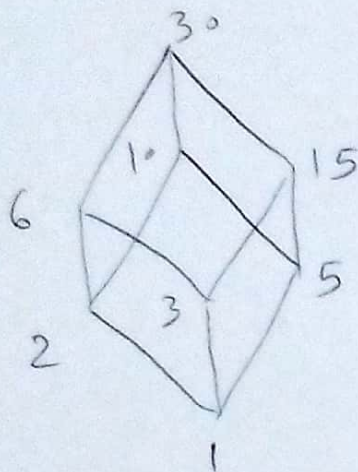
$$f(1) = \emptyset$$

$$f(2) = \{a\}$$

$$f(3) = \{b\}$$

$$f(6) = \{a, b\}$$

مثال ۱، $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ و $(D_{30}, \leq)$ دو مجموعه مرتب کریمتند.



$$f: D_{30} \rightarrow \mathcal{P}(\{a, b, c\})$$

$$f(1) = \emptyset, f(2) = \{a\}, f(3) = \{b\}, f(5) = \{c\}$$

$$f(6) = \{a, b\}, f(10) = \{a, c\}, f(15) = \{b, c\}, f(30) = \{a, b, c\}$$

توضیح ۱: واضح است اگر (A, R) و (B, S) دو مجموعه مرتب کریمت باشند، A و B دو مجموعه مساوی آنگاه $|A| = |B|$ (تعداد اعضا A برابر است با B) در همین خود را مدار می آید (صرف نظر از A و B)

۲) اگر f کریمت باشد در معنوی a و b در A معکوس نایه B باشد آنگاه $f(a)$ و $f(b)$ در B هم معکوس نایه یزند

بنابراین اگر (A, R) و (B, S) دو کریمت باشند و یک مجموعه کمال مرتب هم آید نیز حتماً چنین است.

همچنین می توان گفت که هر دو کریمت (A, R) و (B, S) اگر هم معکوس نایه باشند و f یک کریمت باشد، آنگاه f یک همومورفیسم کریمت است.

۱. تعیین کنید کدامیک از روابط زیر تریتی است.

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, \quad nRy \iff n=y$$

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, \quad nRy \iff n=y \vee y=n+1$$

$$\forall n, y \in \mathbb{Z}, \quad nRy \iff n|y$$

$$\forall n, y \in \mathbb{Z}, \quad nRy \iff n \equiv y \pmod{3}$$

$$\forall n, y \in \mathbb{Z}, \quad nRy \iff n=2y$$

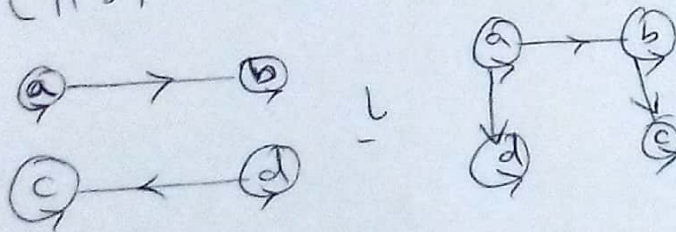
$$\forall n, y \in \mathbb{Z}, \quad nRy \iff y^2 | n$$

$$\forall n, y \in \mathbb{Z}, \quad nRy \iff \exists n \in \mathbb{N} \exists n=y^n$$

رابطه R ماتریس

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \preceq M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \preceq M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

رابطه R با گراف



$$\forall n, y \in \mathbb{R}, \quad nRy \iff n < y$$

$$\forall n, y \in \mathbb{R}, \quad nRy \iff n > y$$

در مجموعه خطوط یک صفحه

$$aRb \iff \text{خط } a \text{ موازی خط } b$$

معمود باشد

۲- مجموعه $A = \{2, 3, 6, 8, 9, 18\}$ همراه با رابطه R که به این صورت است: aRb اگر و تنها اگر a بر b بخش پذیر است.

۳- تعیین کنید کدامیک از روابط زیر ترتیب نام یا ترتیب کاملند

($\{2^n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{1\}$) , ($\{2, 4, 8\}$, $\{1\}$) , ($\{2\}$, $\{1\}$) , ($\{2, 4, 5, 8, 25\}$, $\{1\}$)

($\mathcal{P}(a, b, c)$, $\mathcal{C}$) , ($3\mathbb{N}$, $\{1\}$) , ($\mathbb{N}_e$, $\{1\}$)

$\forall n, y \in \mathbb{Z}, nRy \iff \exists n \in \mathbb{N} \exists n=y^n$

$\forall n, y \in \mathbb{R}, nRy \iff n-y \in \mathbb{Z}^+$

$\forall (n, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2, (n, y)R(z, t) \iff n=z$

$\forall n, y \in \mathbb{N}, nRy \iff |n-y|=1$

بر مجموعه، قطعاً صحت دارد (یا) فارسی:

$nRy \iff$ n ، y متمم دلی دارند
حرف مشترک باشند

$nRy \iff$ تعداد حرف n بیشتر از y باشد

$nRy \iff$ تعداد حرف متمم n یکی باشد

۴- ثابت کنید اگر (A, R) یک مجموعه مرتب باشد آنگاه $(A, \bar{R})$ نیز یک مجموعه مرتب است

توضیح: مجموعه مرتب $(A, \bar{R})$ را دو تا) مجموعه مرتب (A, R) و ترتیب عریض $\bar{R}$ را دو تا) ترتیب R می نامیم (سطح بر سال دو تا) $(\mathbb{R}, <)$ مجموعه $(\mathbb{R}, >)$ است.

۵- با ارائه دلیل تعیین کنید هر یک مجموعه n عضو در صفتاً چند رابطه کامل مرتب تعریف شود.

۶- در مجموعه مرتب (A, R) اگر aRb , $a \neq b$, عضو a را مقدم عضو b را می نامیم و اگر عضو a و b نامشروع و در این صورت a را مقدم بر b و بالعکس b را مقدم بر a می نامیم.

۱۷.

(۱) با این توضیح در مجموعه مرتب $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48\}$ مقدار مقداً و مقدارهای واسطه 24 ، 12 را مشخص کنید.

و همچنین ثابت کنید اگر (A, R) یک مجموعه کاملاً مرتب باشد آنگاه هر عضو A حداکثر یک مقدار واسطه دارد.

۷۔ نفودا عاویس راعی علی زبیرا، سلمہ

$$(D_n, 1)$$

$$n = 6, 16, 24, 30, 32, 100, 105$$

$$(f_0, 2, 5, 10, 11, 12, \leq), (f_1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), 1)$$
$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 1)$$
$$\{1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots, 1\}$$
$$(\mathcal{P}(1, 33, 41), \subseteq)$$

$A = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعة

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 راسخاں باقی ہیں

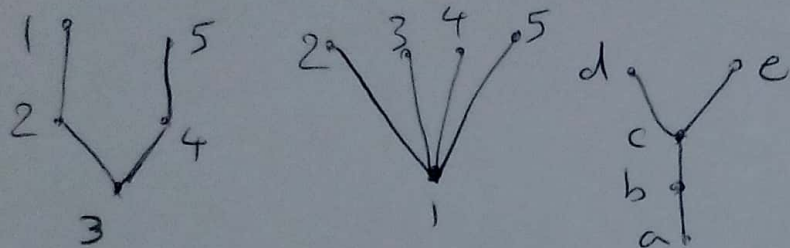
$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (c, d), (c, e), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\} \quad A = \{a, b, c, d, e\}$$

۸- اثر

 مفودا، مایوس کی، راغلا سے، اعلیٰ ز (جہاں مرتب آ) را
 مستحق کسی

۹۔ مائیں، راجہ مان، راجہ مان، راجہ مان

171



- ۱- اگر p و q دو عدد اول متناهی و m, n دو عدد طبیعی باشند و
 $n = p^n q^m$ ، تعیین کنید نمودار هاس محوئ مرتب (A, R) (واقعاً)
 حین مال دارد
- ۱۱- ثابت کنید در گراف جهتدار محوئ مرتب (A, R) ، هیچ دوری به طول بیشتر
 از ۱ وجود ندارد .

تعریف: مجموعه کسب و کار در میان و ماکزیمم در میانه.
 اگر (A, R) یک مجموعه مرتب باشد و عضو $u \in A$ ، یک مجموعه کسب و کار
 این مجموعه را نامیم عرّاق.

$\forall n \in A, uRn \Rightarrow n = u$
 به عبارت دیگر عرّاق خودی عضو u قرار گیرد و بطور عرّاق
 $l \in A$ ، یک عضو در میان مجموعه را نامیم عرّاق.

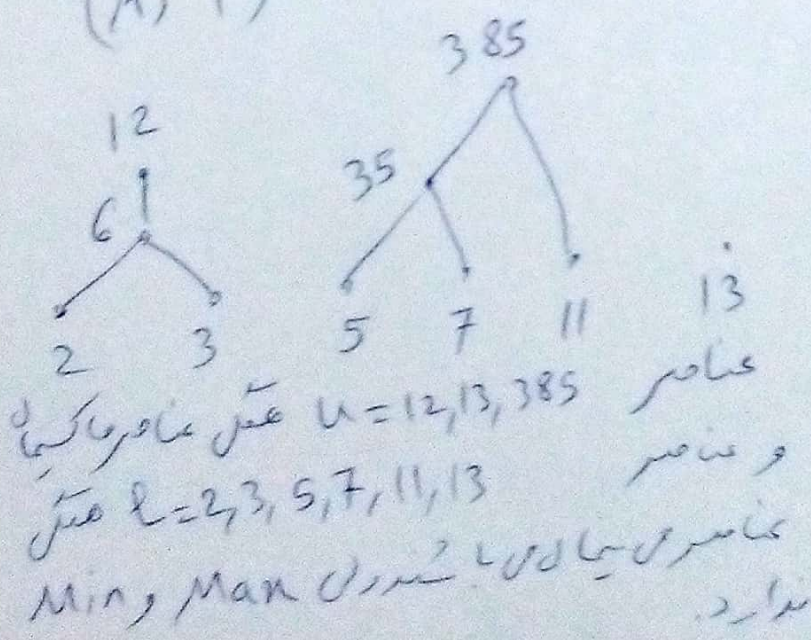
$\forall n \in A, nRl \Rightarrow n = l$
 عرّاق عرّاق از عضو l عرّاق است (اگر l قرار نداشته باشد در خود)
 و همچنین عضو l را عضو ماکزیمم مجموعه را نامیم عرّاق. عرّاق از عرّاق
 اعضاء مجموعه مرتب (A, R) باشد عرّاق.

$\forall n \in A, nRM$
 و بطور عرّاق عضو $m \in A$ را عضو عرّاق مجموعه را نامیم عرّاق.
 قبل از عرّاق اعضاء مجموعه باشد عرّاق.

$\forall n \in A, mRn$

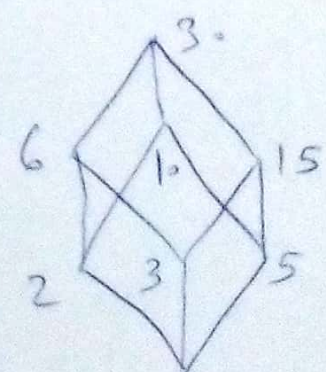
$A = \{2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 35, 385, 13\}$

$(A, 1)$



مثال ۱

$(D_3, 1)$



$M = 30$ ماکزیمم در میانه، عرّاق
 $m = 1$ ماکزیمم در میانه، عرّاق
 است

در مجموعه مرتب (A, R)

۱۷۲

$$\forall x \in M, 1 | x$$

$m=1$ عنصری خیال در مجموعه است ولی نه ماکزیموم، نه ماکسیمال وجود ندارد.

اگر $A = (0, 1)$ یا $[0, 1]$ در این صورت در مجموعه مرتب (A, R) عنصری خیال در مجموعه، ماکزیمال و ماکزیموم وجود ندارد.

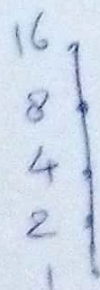
بنابراین، الف، عناصر ماکزیموم در مجموعه در صورت وجود مشخص فردی در ماکسیمال در مجموعه لزوماً چنین نیستند.

۱- اگر (A, R) یک مجموعه مرتب متناهی باشد حتماً عنصر ماکزیمال و حتماً عنصر خیال دارد.

ج ۱- اگر (A, R) یک مجموعه مرتب نامتناهی باشد حتماً ماکزیموم در مجموعه دارد.

مثال، در مجموعه مرتب (A, R)

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

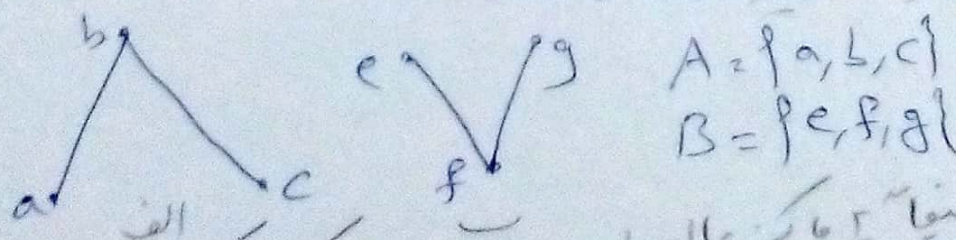


عناصر ماکسیموم و ماکسیمال
 $M = 16$
 $m = 1$ عنصری خیال

۲- برای اثبات شود اگر (A, R) و (B, S) در مجموعه

مرتب گیریت باشند آنگاه عنصری در مجموعه ماکزیمال، ماکزیمال است و بطور متناهی برای ماکزیموم در مجموعه در خیال نیز چنین است.

مثال، مجموعه های مرتب زیر گیریت هستند.



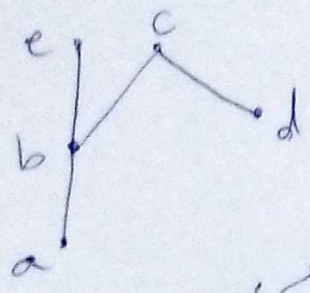
$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{e, f, g\}$$

حل از برای شکل (ب) در تفریق ۱ ماکزیمال دارد ولی الف نقطه ماکسیمال دارد.
هر ترتیب توابع کوچک
اگر (A, R) یک مجموعه مرتب متناهی باشد، می توان یک رابطه تعاملاً مرتب مانند S روی A ایجاد کرد بطوریکه همه زوجهای مرتب R را

مسئله باشد، به رابطه ترتیبی که مطابق دستور زیر ساخته می شود، ترتیب توپولوژیک گفته می شود. نام

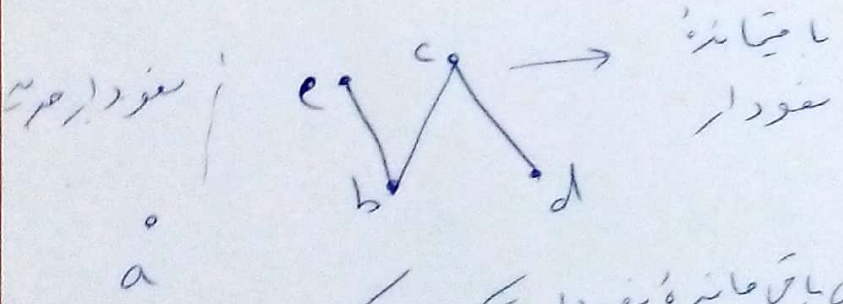
مثال اثر (A, R) مجموعه مرتب که نمودار عادی در زیر به یک ترتیب توپولوژیک برای آن پیوسته.



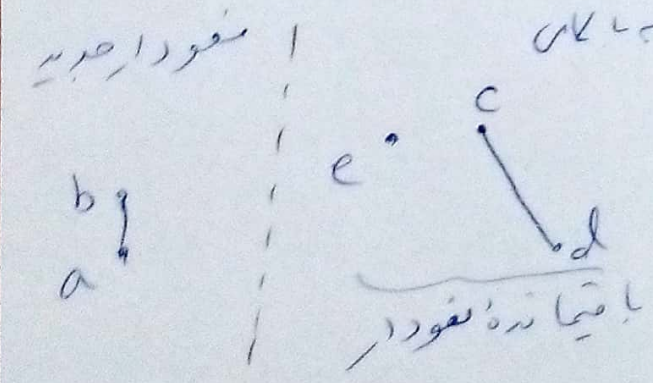
حل ۱

مرحله اول: عناصر میانی مجموعه را مشخص کرده در این مرحله، $\{a, d\}$ = مجموعه عناصر میانی

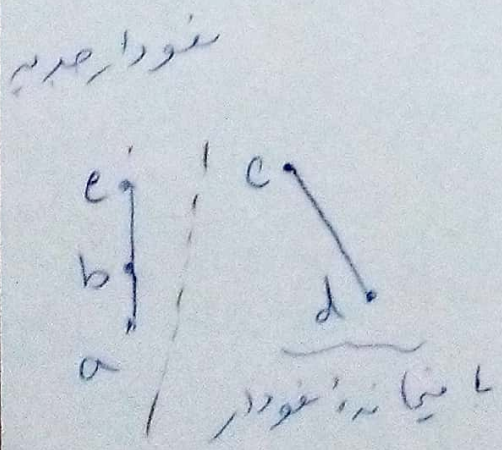
یک راه درخواست حلقه a را انتخاب کرد، در از نمودار عادی جدا می کنیم واضح است اگر a جدا شود، هیچ یال یا حلقه ای در این بخش نیز از شکل جدا می شود پس داریم

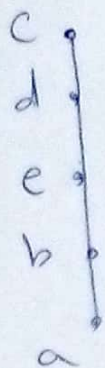


مرحله دوم: عملیات مرحله اول را برای باقی مانده نمودار تکرار می کنیم، $\{b, d\}$ = مجموعه عناصر میانی
به درخواست یک از عناصر میانی را انتخاب کردیم، b را
فردا جدا می کنیم، حلقه b را
انتخاب می کنیم.



مرحله سوم: $\{c, d\}$ = مجموعه عناصر میانی
به درخواست c را انتخاب می کنیم.





مقدار فوق، نمودار یک رابطه، تماماً مرتب شامل زدهای R است،
را منع است که در هر خط از موارد معنوی میان منقصه فرد نیز بنابرین
برای یک رابطه باشد R ، ممکن است چندین ترتیب تولید لور یک نوشت.

تعریف اگر (A, R) یک پارتیشن و سوپر موم را اینصورت

اگر (A, R) یک مجموعه مرتب و $\emptyset \neq X \subseteq A$ یک زیر مجموعه A باشد
و معنوی $u \in A$ یک کرانه بالا X و نامی u که u عبارت از
عناصر X باشد به عبارتی

$$\forall u \in X: \exists uRu$$

و در این صورت مجموعه مرتب (X, R) را از بالا کرانه دار می نامیم.

مطابق مستند هر معنوی $l \in A$ یک کرانه پایین مجموعه X و نامی l که l قبل از
عناصر X باشد یعنی

$$\forall u \in X: lRu$$

و در این صورت مجموعه (X, R) را از پایین کرانه دار می نامیم.

و اگر مجموعه (X, R) از بالا کرانه دار باشد معنوی $u \in A$ را سوپر موم

مجموعه مرتب (X, R) و نامی $u = \sup(X)$ که u کوچکتر از

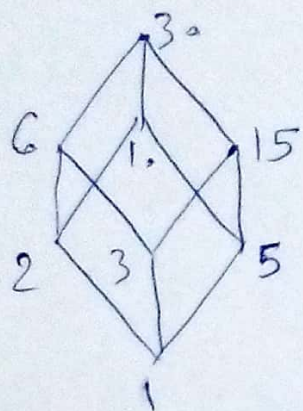
کرانه بالا X باشد یعنی

$$\begin{aligned} u &= \min \{u \mid u \text{ کرانه بالا } X\} \\ &= \text{کوچکترین کرانه بالا } X \\ &= \text{l.u.b. } X \end{aligned}$$

۱۷۹
و همچنین مجموعه (X, R) از پایین گراندا باشد معنو l, eA را اینصورت محصور
مرت (X, R) را میگویند و نیز $l = \inf(x)$ و $u = \sup(x)$ را بزرگترین کران
پایین x باشد

$$l = \inf(x) = \max\{l \in A \mid l \leq x\}$$

$$= \text{بزرگترین کران پایین } x$$



مثال ۱ در مجموعه مرت $(D_3, \leq)$

اگر $X = \{1, 3, 5\}$ در این صورت

$$X \text{ مجموعه گراندا باشد } \Rightarrow \sup(x) = 15$$

$$\sup(x) = 15, \text{ ندارد } \max$$

$$\inf(x) = 1 = \min(x), \text{ مجموعه گراندا باشد } \Rightarrow \inf(x) = 1$$

و اگر $X = \{2, 3, 6\}$

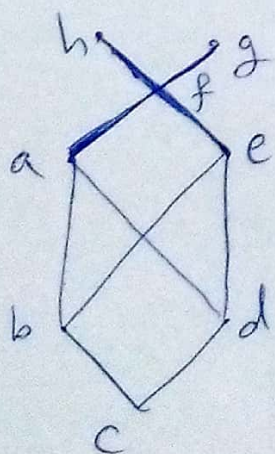
$$\sup(x) = 6 = \max(x), \text{ مجموعه گراندا باشد } \Rightarrow \sup(x) = 6$$

$$\inf(x) = 1, \text{ ندارد } \min, \text{ و } \inf(x) = 1$$

و اگر $X = \{2, 6, 1, 3\}$

$$\sup(x) = \max(x) = 3, \text{ مجموعه گراندا باشد } \Rightarrow \sup(x) = 3$$

$$\inf(x) = 2 = \min(x), \text{ و } \inf(x) = 2$$



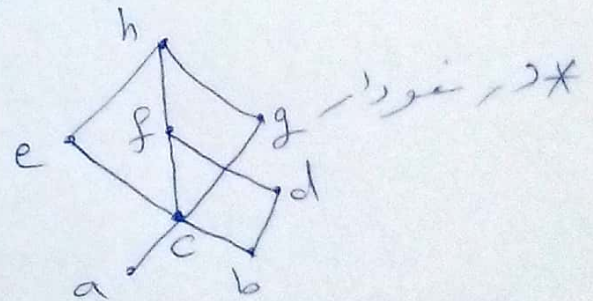
* و در مجموعه مرت $(D_3, \leq)$

اگر $X = \{a, c, d, e\}$

$$\sup(x) = \max(x) = e, \text{ مجموعه گراندا باشد } \Rightarrow \sup(x) = e$$

$$\sup(x) = \min(a, e, f, g, h)$$

$$\inf(x) = \min(x) = c, \text{ مجموعه گراندا باشد } \Rightarrow \inf(x) = c$$

و اگر $X = \{f, g, h\}$ $\sup(X)$ وجود ندارد زیرا X کران بالا ندارد.مجموعه کرانهای X = $\{f, a, e, b, d, c\}$ ، $\inf(X) = \min(X) = f$ و اگر $X = \{a, e, f, g\}$ مجموعه کرانهای بالا X = $\{g\} \Rightarrow \sup(X) = g = \max(X)$ مجموعه کرانهای پایین X = $\{b, c, d\} \Rightarrow \inf(X) = \min\{b, c, d\}$
وجود ندارد پس هیچ مفهوم عمق ندارد.* مجموعه مرتب $X = (0, 1]$ ، $\inf(X) = 0$ ، $\sup(X) = 1$ مجموعه کرانهای بالا X = $[1, +\infty)$ $\Rightarrow \sup(X) = \max(X) = 1$
مجموعه کرانهای پایین X = $(-\infty, 0]$ $\Rightarrow \inf(X) = 0$ ، $\min(X)$ ندارد $X_3 = \{f, g\}$ ، $X_2 = \{c, d\}$ ، $X_1 = \{c\}$ اگر $X_4 = \{a, d\}$ باشدمجموعه کرانهای بالا X_1 = $\{c, f, g, e, h\} \Rightarrow \sup(X_1) = \max(X_1) = c$
مجموعه کرانهای پایین X_1 = $\{c, a, b\} \Rightarrow \inf(X_1) = \min(X_1) = c$ مجموعه کرانهای بالا X_2 = $\{f, h\} \Rightarrow \sup(X_2) = f$ ، $\max(X_2)$ ندارد
مجموعه کرانهای پایین X_2 = $\{b\} \Rightarrow \inf(X_2) = b$ ، $\min(X_2)$ نداردمجموعه کرانهای بالا X_3 = $\{h\} \Rightarrow \sup(X_3) = h$ ، $\max(X_3)$ ندارد
مجموعه کرانهای پایین X_3 = $\{c, b, a\} \Rightarrow \inf(X_3) = c$ ، $\min(X_3)$ نداردمجموعه کرانهای بالا X_4 = $\{f, h\} \Rightarrow \sup(X_4) = f$ ، $\max(X_4)$ ندارد
مجموعه کرانهای پایین X_4 = $\{a, d\} \Rightarrow \inf(X_4)$ ، $\min(X_4)$ ندارد

تعریف شبکه Lattice

مجموعه مرتب (A, R) را یک شبکه می‌گوئیم هرگاه هر زیرمجموعه دو عضوی آن در A دارای $\sup$ و $\inf$ باشد، به عبارتی برای هر $x, y \in A$ ، $\sup\{x, y\} \in A$ و $\inf\{x, y\} \in A$ موجود باشد.

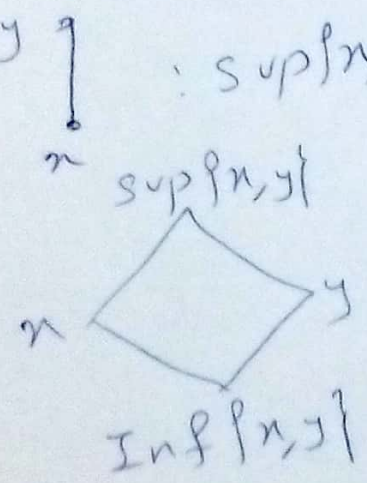
توضیح:

در حالت کلی اگر (A, R) یک مجموعه مرتب باشد و x در آن در عضو دلخواه A ، در حالت ممکن است: x و y با هم رابطه R ندارند یا ندارند یعنی x و y مقایسه پذیرند یا نه.

اگر x و y با هم در رابطه باشند xRy :

$\sup\{x, y\} = y$ ، $\inf\{x, y\} = x \Rightarrow \sup\{x, y\} \in A$ و $\inf\{x, y\} \in A$

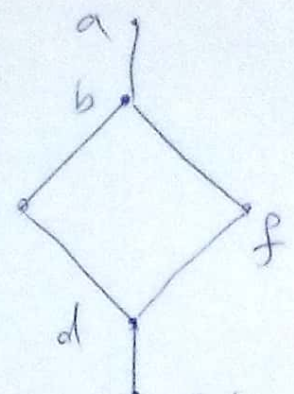
و اگر x و y با هم در رابطه نباشند،



نیاز نیست برای تحقق در شبکه بودن یک مجموعه، فقط کافیست عناصر هر از مجموعه بر اساس خود که با هم در رابطه نیستند.

در نمودار کس، فقط عناصر c و f در ارتباط نیستند با این معنی در عضو برابر می گیریم،

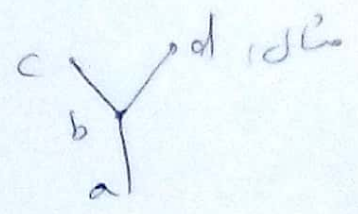
$Sup\{c, f\} = b, Inf\{c, f\} = d$



مثال ۱

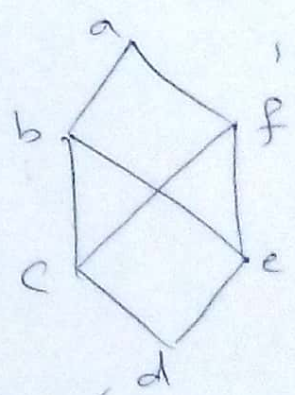
این شکل یک شبکه است.

این شکل شبکه نیست، فقط c و d در ارتباط نیستند و $Sup\{c, d\}$ وجود ندارد زیرا $\{c, d\}$ گرانگ ندارد.



عناصر b, f ، عناصر c, e با هم در ارتباط نیستند.

نمودار مربوط $\Rightarrow$ وجود ندارد $Inf\{b, f\}$ به یک شبکه نیست.



مثال ۱

(مجموعه مقسوم علیه ها عدد طبیعی n)

مثال ۱ در حالت کلی برای $n \in \mathbb{N}$ (D_n) شبکه است زیرا

برای n و y در D_n

$Sup\{n, y\} = [n, y] =$ کوچکترین مضرب مشترک n, y

$Inf\{n, y\} = (n, y)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک n, y

براحتی ثابت شود اگر $n | n, n | y$ آنگاه $[n, y] | n, (n, y) | n$ بنابراین D_n هم یک شبکه است.

$[n, y] \in D_n, (n, y) \in D_n$

مثال: تعیین اثر یک مجموعه $(S, \subseteq)$ نیز یک شبکه است زیرا

$\forall x, y \in \mathcal{P}(S) \quad Sup\{x, y\} = x \cup y$
 $Inf\{x, y\} = x \cap y$

$x \subseteq S, y \subseteq S \Rightarrow x \cup y \subseteq S, x \cap y \subseteq S \Rightarrow Sup\{x, y\}, Inf\{x, y\} \in \mathcal{P}(S)$

س (A, R) یک شبکه است.

مثال: واضح است که اگر (A, R) یک مجموعه کاملاً مرتب باشد آنگاه شبکه است.

حل: از برای هر $(n, y) \in A$ داریم n و y مقایسه پذیرند در نتیجه مثلاً اگر

$$nRy \text{ داریم } \begin{cases} \text{Inf}\{n, y\} = n \\ \text{Sup}\{n, y\} = y \end{cases}$$

در حالیکه در یک ترتیب جزئی لزوماً مجموعه مرتب (A, R) شبکه نیست.

توضیح:

الف: قرارداد نگارشی: اگر (A, R) یک شبکه باشد در این صورت Sup و

Inf هر مجموعه (مجموعه آ) را به صورت زیر نمایش می دهیم:

فصل n و y میلت meet $\text{Sup}\{n, y\} = n \vee y$
وصل n و y join $\text{Inf}\{n, y\} = n \wedge y$

در حالت کلی

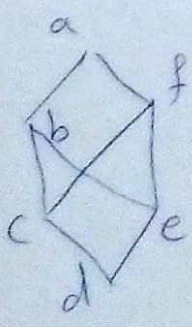
$$\begin{aligned} \text{Sup}\{n_1, n_2, \dots, n_n\} &= n_1 \vee n_2 \vee \dots \vee n_n = \bigvee_{i=1}^n n_i \\ \text{Inf}\{n_1, n_2, \dots, n_n\} &= n_1 \wedge n_2 \wedge \dots \wedge n_n = \bigwedge_{i=1}^n n_i \end{aligned}$$

ب: شبکه ها را به صورت نمودار عادی آنها نیز می توان نمایش داد زیرا

همواره به صورت ترکیبی از چند ضلعیهار بسته می باشند و از این رو آنها را شبکه می نامند.

واضح است که نمودار عادی یک مجموعه مرتب از بالا یا پایین به این صورت عناصر در مجموعه مورد نظر وجود دارند که Sup یا

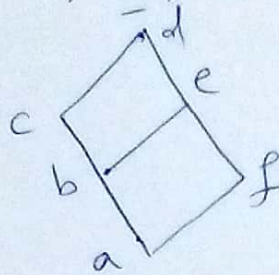
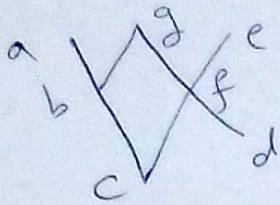
Inf هر مجموعه حاصل از آنها در مجموعه وجود ندارد از این رو شبکه نیستند.



البته همواره همه چند ضلعیهار بسته لزوماً شبکه نیستند مانند

و یک مجموعه که به صورت یک شبکه نمایش داده شده است.

طوری که در امتداد خود داره یک شبکه است؟



با توجه به توصیحات قبل چون نمودار سمت چپ از بالا، همچنین از پایین
از راست پس شبکه نیست. نمودار $a \vee g = c \wedge d$ وجود ندارد
اما شکل سمت راست چون یک شبکه است است شاید شبکه باشد. در این تحقیق
این موضوع باید اطمینان از نمودار که مهم در این است نیستند را بررسی کنیم.
عین c و e همچنین c و f و همچنین b و f .

$$c \vee e = d, c \wedge e = b$$

$$c \vee f = d, c \wedge f = a$$

$$b \vee f = e, b \wedge f = a$$

ج ۱ اگر (A, R) و (B, S) دو مجموعه مرتب گیریت باشند، در این صورت
آنها یک شبکه باشد اگر و تنها شبکه است زیرا ثابت می شود

$$\forall x, y \in A, f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

اگر f یک مرتبه بین A و B باشد.

بنابراین چون $(D_n, |)$ یک شبکه است هر مجموعه مرتب گیریت (A, R)

نیز چنین است، همین طور، اگر $S \neq \emptyset$ ، هر مجموعه مرتب
گیریت $(P(S), \subseteq)$ نیز یک شبکه است.

> اگر f یک مرتبه بین دو شبکه باشد، در این صورت تصویر هر $\sup$ ،

$\sup$ است، و تصویر هر $\inf$ ، $\inf$ است به عبارتی اگر f یک مرتبه

بین شبکه ها (L_1, R_1) و (L_2, R_2) باشد در این صورت

$$\forall x, y \in L_1, f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

۱۸۲ هر اثر (L, R) یک شبکه باشد. دو گام (A) نیز یک شبکه است.
چون $(L, \bar{R})$ نیز شبکه است.

می دانیم (L_1, R_1) و (L_2, R_2) دو شبکه باشند. آنگاه $(L_1 \times L_2, \sim)$ نیز یک شبکه است.
راغبه حاصل ضربی

این خاصیت شبکه
اثر (A, R) یک شبکه است

$$\textcircled{1} \forall x, y \in A, \quad xRy \iff x \wedge y = x$$

$$xRy \iff x \vee y = y$$

$$\textcircled{2} \forall x \in A : \quad x \vee x = x \wedge x = x \quad \text{خاصیت خود توانی}$$

$$\textcircled{3} \forall x, y \in A : \quad x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x \quad \text{خاصیت جابجایی}$$

$$\textcircled{4} \forall x, y \in A : \quad \left. \begin{aligned} x \vee (x \wedge y) &= x \\ x \wedge (x \vee y) &= x \end{aligned} \right\} \quad \text{خاصیت جذب}$$

$$\textcircled{5} \forall x, y, z \in A : \quad \left. \begin{aligned} x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z \\ x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z \end{aligned} \right\} \quad \text{خاصیت شرکت پذیری}$$

$$\textcircled{6} \forall x, y, z \in A : \quad \begin{aligned} xRy, xRz &\implies \{xR(y \wedge z), xR(y \vee z)\} \\ yRz, zRz &\implies \{(y \vee z)Rz, (y \wedge z)Rz\} \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} \forall x, y \in A : \quad xR(x \vee y), \quad (x \wedge y)Rz \quad \text{خاصیت همزایی}$$

$$\textcircled{8} \forall x, y \in A : \quad xRy \implies \left\{ \begin{aligned} \forall z \in A, & (x \wedge z)R(y \wedge z) \\ & (x \vee z)R(y \vee z) \end{aligned} \right.$$

$$\textcircled{9} \forall x, y, z, t \in A : \quad xRy, zRt \implies \left\{ \begin{aligned} & (x \vee z)R(y \vee t) \\ & (x \wedge z)R(y \wedge t) \end{aligned} \right.$$

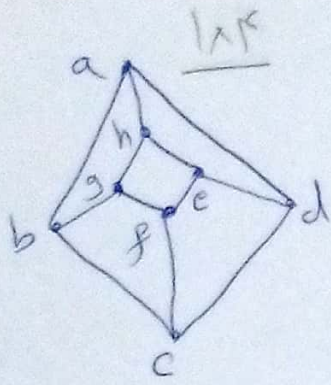
$$\textcircled{10} \forall x, y, z \in A : \quad \left\{ \begin{aligned} & x \vee (y \wedge z)R(x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ & (x \wedge y) \vee (x \wedge z)R x \wedge (y \vee z) \end{aligned} \right\} \quad \text{نامساوی کوشی}$$

$$\forall x, y, z \in A : \quad \begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &\leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) &\geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{aligned}$$

تعریف از شبکه

اثر (L, R) یک شبکه و $A, \emptyset \neq A \subseteq L$ یک زیر شبکه (L, R) است
فرض کنید A دارای دو عضو x و y است، $x \wedge y \in A$ ، به عبارتی
هر دو عضو کم در A باشد $\inf, \sup$ در عضوین A باشد.

مثال ۱ اثر (L, R) شبکه دو بر دو باشد،
 (L, R)



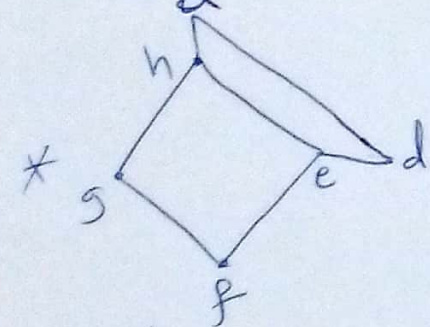
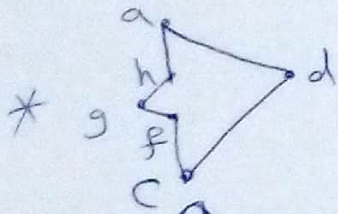
زیر شبکه نیست، زیرا

(S_1, R)

$f, d \in S_1, \sup\{f, d\} = e \notin S_1$
 زیر شبکه نیست

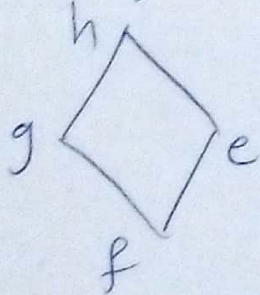
(S_2, R)

$f, d \in S_2, \inf\{f, d\} = c \notin S_2$

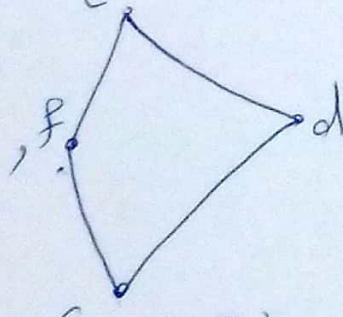


S_3 و S_4 هر دو زیر شبکه اند، ولی S_5 زیر شبکه نیست.

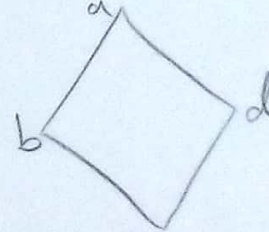
$\sup\{b, d\} = h \notin S_5$



(S_3, R)



(S_4, R)



(S_5, R)

مثال ۲ اثر (L, R) منقول شبکه در زیر باشد کدامیک از زیر مجموعه ها (A) زیر شبکه اند؟

$$L_1 = \{a, b, f, g\}$$

$$a \vee b = c \notin L_1 \Rightarrow$$

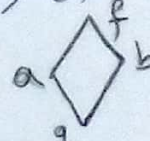
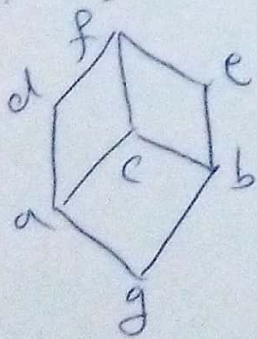
$$L_2 = \{a, e, f, g\}$$

$$a \vee e = f \in L_2$$

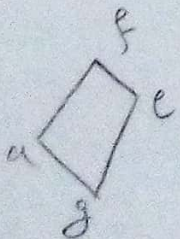
$$a \wedge e = g \in L_2$$

فرغ و اعم در را می اند

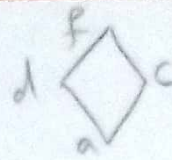
در زیر شبکه است



زیر شبکه نیست



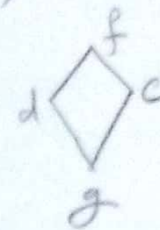
180
 $L_3 = \{d, c, f, a\}$



$\sup\{d, c\} = d \vee c = f \in L_3 \Rightarrow$ L_3 is a lattice.

$\inf\{d, c\} = d \wedge c = a \in L_3$

$L_4 = \{c, d, f, g\}$

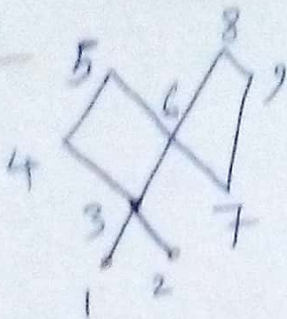


$d \wedge c = a \notin L_4 \Rightarrow$ L_4 is not a lattice.

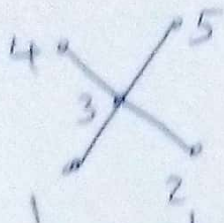
مثال ۱: $(D_n, \mid)$ is a lattice.

$\forall x, y \in D_n:$ $\sup\{x, y\} = x \vee y = [x, y]$ (lcm)
 $\inf\{x, y\} = x \wedge y = (x, y)$ (gcd)

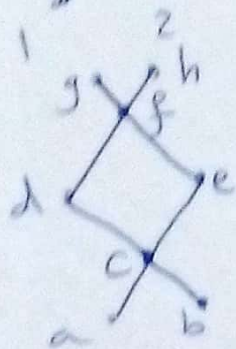
$x \mid n, y \mid n \Rightarrow [x, y] \mid n, (x, y) \mid n$
 $\Rightarrow [x, y] \in D_n, (x, y) \in D_n$
 $\Rightarrow x \vee y \in D_n, x \wedge y \in D_n$
 $\Rightarrow D_n$ is a lattice.



$$X = \{3, 4, 6\}$$



$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



$$X = \{c, d, e\}$$

$$(\{ 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48 \} , |) \quad X = \{ 4, 6, 12 \}$$

$$X = \{ n \in \mathbb{R} \mid 8 < n^3 < 15 \}$$

($\mathbb{R}, \leq$) مجموعه اعداد حقیقی که از ۸ به توان ۳ کوچکتر و از ۱۵ به توان ۳ بزرگتر باشند.

۳- فرض کنید یک شرکت کامپیوتری در نظر دارد که اطلاعاتی را در رابطه با کاربران سایت خود جمع آوری کند تا با استفاده از این اطلاعات به مشخص سازی اطلاعات صفحه وب هر کاربر بپردازد.

اگر X مجموعه محصولات باشد که کاربران این سایت به جستجو در آنجا می پردازند و n در X به صورت زیر تعریف شود:

مشتری صفحه y را به صفحه x می فرستد $\iff xRy$

اگر شرکت اطلاعات جدول زیر را در رابطه با کاربران سایت خود بدست آورد باشد:

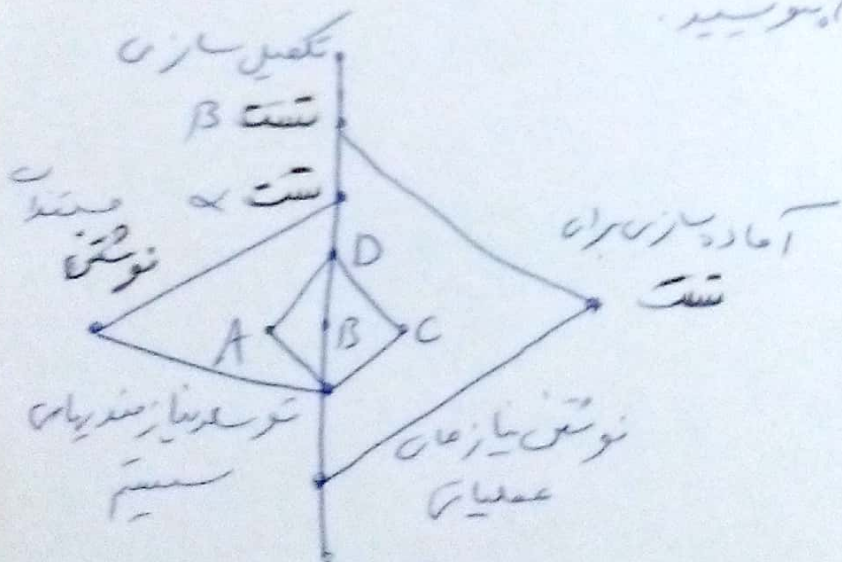
الف) نمودار عا (X, R) را رسم کنید.

ب) محصولات که بیشترین علاقه را جذب کرده اند و همچنین محصولات که کمترین علاقه را جذب کرده اند مشخص کنید.

۸: یک ترتیب توپ لوزیک برای این علائق بنویسید.

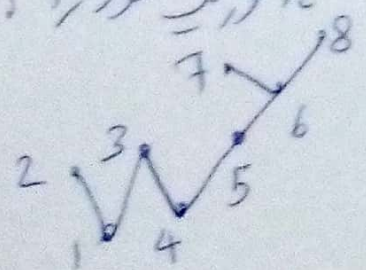
توجه کار بر روی موضوع	نسبت به موضوع
علم	خبر
"	موسیقی
موسیقی	موسیقی
"	مقارن
"	عاشق
خبر	"
"	انجمن ها
مقارن	سینما
"	مآثر
عاشق	"
"	لشکری اینترنشنل
انجمن ها	در دست
سینما	"
مآثر	"

۴- مفودار عاوس زیر ترتیب انجام مراحل یک پروژه نرم افزار را نشان می دهد
یک ترتیب توپ لوزیک برای آن بنویسید.



- A : انجام مرحله اول
- B : " دوم
- C : " سوم
- D : افعال مراحل

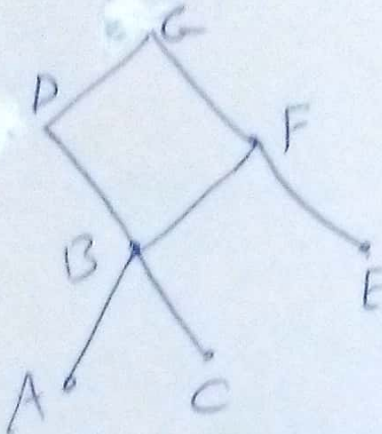
۹- با توجه به مفودار عاوس زیر که امکان دارد زیر یک ترتیب توپ لوزیک مفودار آن را بنویسید.



از دست به راست
" "
"

- الف : ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸
- ب : ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۱ ۳ ۲
- ج : ۱ ۴ ۳ ۲ ۵ ۶ ۷ ۸

۶- یک پروژه کامپیوتری دارا ۱۰ مرحله کاری است، مراحل
مراحل آن چنان است که باید پس از پایان هر یک از مراحل پروژه انجام شود
بنابرین رابطه R را روی این ۱۰ مرحله کاری به صورت زیر ترسیم کنیم
مرحله ۱ قبل از مرحله ۲ قابل اجرا باشد $xRy \iff$
آنگاه گراف این رابطه در زیر باشد، یک ترتیب توبه نوزاد برای آن بسازید

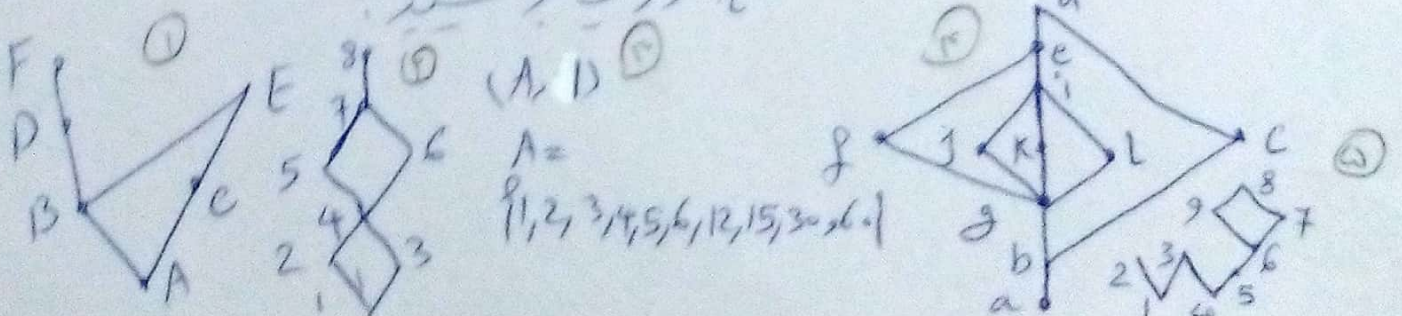


۷- برخی از دروس رشته کامپیوتر و برخی سایر دروس (در جدول آمده است)
مدیر گروه می تواند ترتیبی جهت گذراندن دروس ارائه دهد که پیشنیازها رعایت شود
و حداقل دروس ممکن در یک ترم اخذ گردد (اگر لازم باشد).

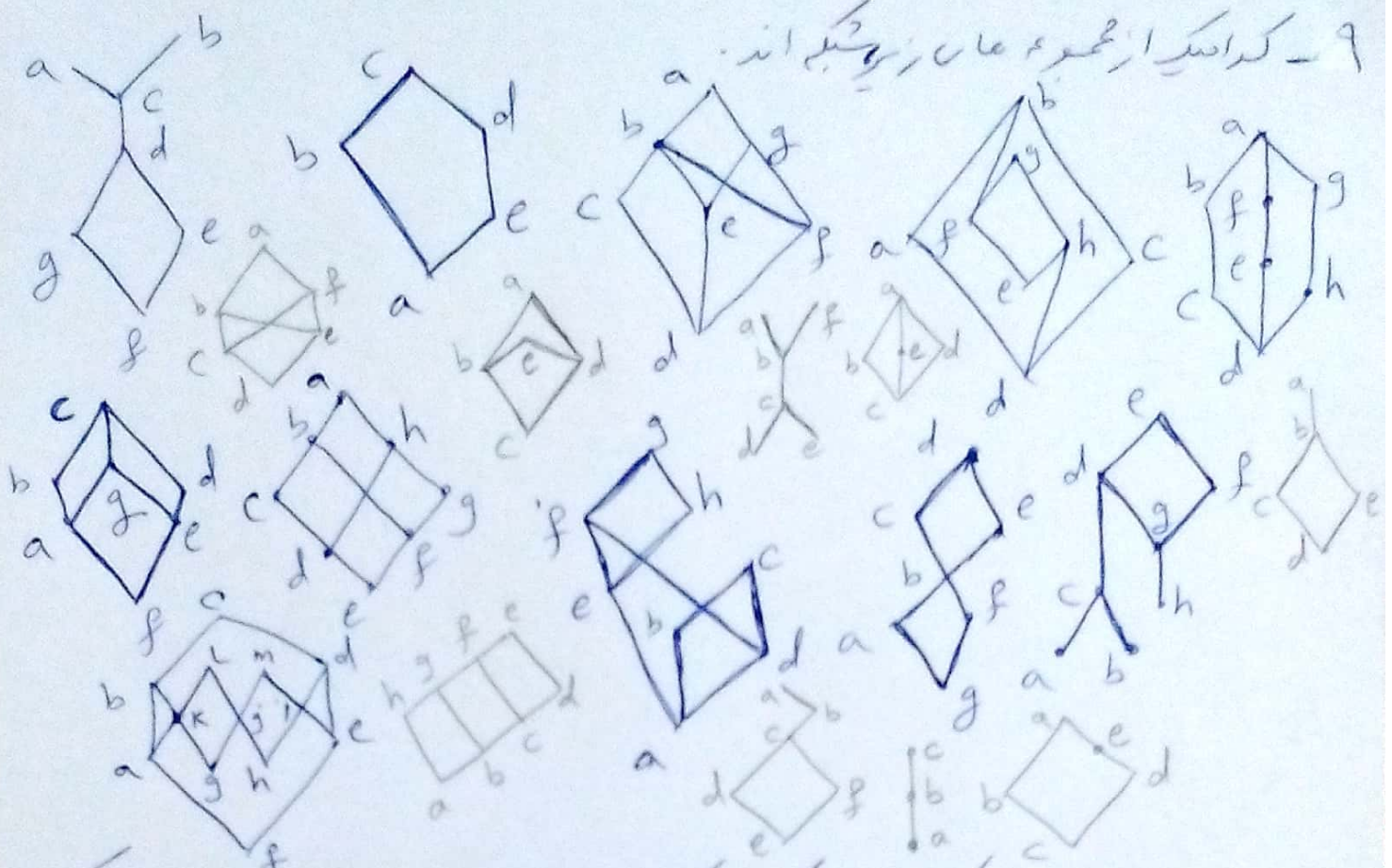
عنوان درس	درس پیشنیاز
۱ ریاضی ۱	—
۲ " ۲	۱ ریاضی ۱
۳ " ۳	۲ " ۲
۴ جبر خطی	۲ " ۲
۵ برنامه سازی مقدماتی	۲ " ۲
۶ مبانی برنامه سازی	۲ " ۲
۷ گرافیک کامپیوتری	۲ " ۲

برنامه سازی گرافیک
مستند از آن فراختر از جبر خطی و ریاضی ۳

۸- برای مجموعه معادلات زیر یک ترتیب توبه نوزاد بسازید

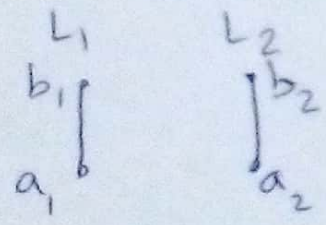


۹- کداسک از مجموعه های زیر بکشد اند.



۱۰- کلیه خودارهای غیر یکریخت شبکه های یک و دو و سه و چهار و پنج عضوی را رسم کنید.

۱۱- اگر L_1 و L_2 دو شبکه $L_1 \times L_2$ خودارهای زیر باشند، خودارهای $L_1 \times L_2$ را با ترتیب حاصل قسری رسم کنید.



۱۲- ثابت کنید هر مجموعه کاملاً مرتب یک شبکه است.

۱۳- یک افزاز عدد طبیعی n ، مجموعه ای از اعداد طبیعی است که جمع آنها برابر n باشد مثلاً برای عدد $n=5$ ، افزازها 5 ، $1+4$ ، $2+3$ ، $1+1+3$ ، $1+2+2$ ، $1+1+1+2$ و $1+1+1+1+1$ است.

بر مجموعه افزازهای n ، رابطه R را به صورت زیر تعریف کنیم:

اعداد P_1 و P_2 افزاز n را به صورت $P_1 \leq P_2$ می گویند اگر P_1 حاصل P_2 باشد. $P_1 R P_2 \iff P_1 \leq P_2$ خودارهای حاصل افزازهای عدد $n=5$ را رسم کرده و تعیین کنید آیا این خودار مربوط به یک شبکه است.

۱۴. مقدار حاصل ضرب (D_{24}) کم در (D_{12}) در q در عدد اول q باشد
 را رسم کنید که این مقدار چند بار دارد و آیا یک شکل است؟

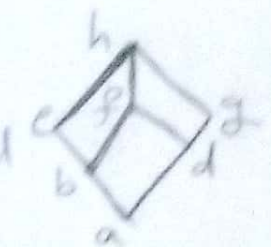
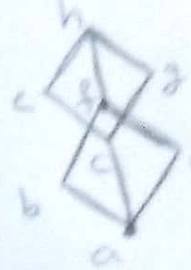
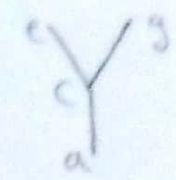
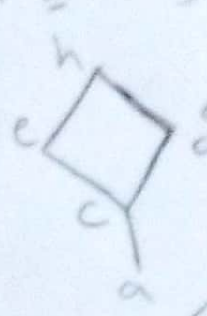
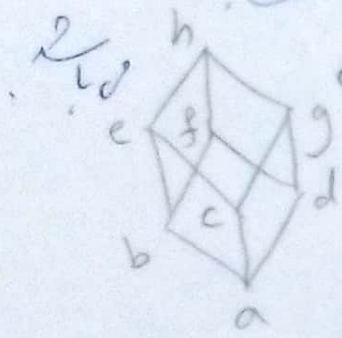
۱۵. در نظر گرفتن (D_3) کدامیک از مجموعه ها مرتب است، زیرشکل است.

$X = \{1, 3, 5, 6\}$, $X = \{1, 3, 5, 15\}$, $X = \{1, 2, 3, 6, 30\}$
 $X = \{1, 2, 3, 10, 15, 30\}$, $X = \{6, 15, 30\}$

۱۶. یک زیرشکل ها (D_{24}) و (D_3) را مشخص کنید.

۱۷. ثابت کنید هر شکل صد اکثر سه عنوان حتماً کاملاً مرتب است.

۱۸. تعیین کنید کدامیک از مجموعه ها زیر، زیرشکل این بزرگ



۱۹. در درستی گزاره ها زیر تحقیق کنید.

الف) در هر مجموعه مرتب شده، اگر مقادیر n یکسان موجود باشد،

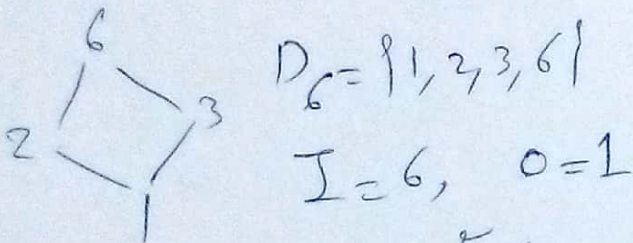
ب) در هر مجموعه مرتب شده، اگر مقادیر n یکسان موجود باشد، آن مجموعه
 فائز میوه است.

هر شبکه که دارای عضو ماکزیموم، عضو مینیمم باشد را شبکه محدود می‌نامیم.
 عضو ماکزیموم را حرف I و عضو مینیمم را حرف 0 نشان می‌دهیم.

مثال ۱ در شبکه $(L, \leq)$ عضو ماکزیموم است و ϕ عضو مینیمم است.
 $\forall x \in L: \phi \leq x \leq I \Rightarrow x$ ماکزیموم است.

در شبکه $(D_n, \leq)$

$\forall n \in D_n: 1/n, n/n \Rightarrow 1$ عضو ماکزیموم است و ϕ عضو مینیمم است.



واضح است که اگر (L, R) یک شبکه محدود باشد، آنگاه:
 $x \vee 0 = x$
 $x \wedge I = x$

تایید: هر شبکه متناهی، محدود است.
 تعریف: شبکه بخش یا توزیع پذیر

شبکه (L, R) را بخش یا توزیع پذیر می‌گویند اگر:

$$\forall x, y, z \in L: x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

به عبارتی $\sup$ و $\inf$ شبکه نسبت به هم خاصیت بخش داشته باشند.

برای هر $S \neq \phi$ ، $(L, \leq)$ یک شبکه بخش است زیرا:

$$\forall x, y \in S: x \vee y = x \cup y$$

$$x \wedge y = x \cap y$$

و احتمالاً اشتراک نسبت به هم خاصیت بخش دارند.

مثال ۲: برای هر عدد صحیح n ، D_n نیز یک شبکه بخش است زیرا:

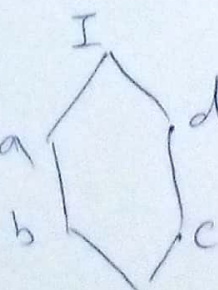
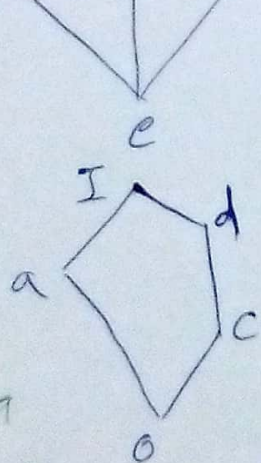
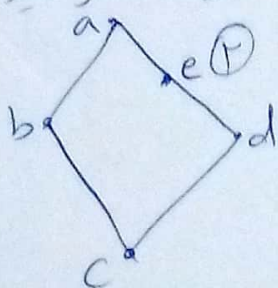
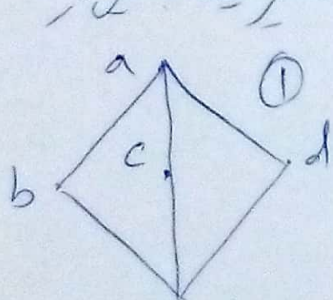
$$\forall n, y \in D_n: x \vee y = [x, y], \quad x \wedge y = (x, y)$$

الف) ثابت شود که اگر (L, R) یک شبکه باشد

$$\forall x, y, z \in L: (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \iff (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

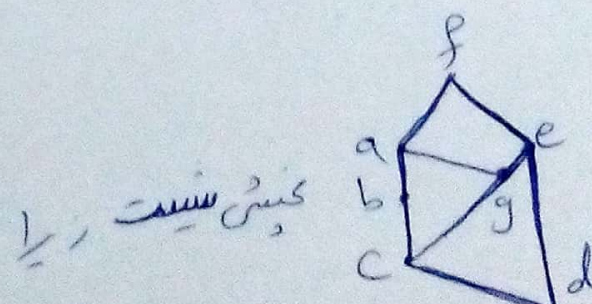
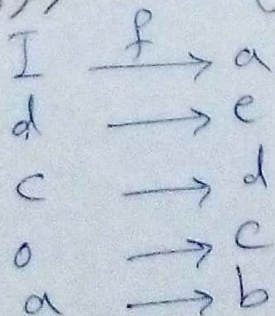
ب) دو همبستگی اثر از سه عضو x, y, z دو عضو دیگر را می‌سازد یا یکی از اعضا I و 0 (مانند یونان) می‌باشد، حتماً هر رابطه همبستگی (در فرض قبول همبستگی بود) شبکه (صدق می‌کند) اما باز هم در صورت تعداد اعضا اینکار (تحقیق همبستگی بود) و متغیر است و معلوم از حقیقت زیرا استفاده می‌کنیم.

مقیاس (L, R) یک شبکه همبستگی است، اگر در آن اثر زیر شبکه آن گرفت یا یکی از این دو شبکه داشته باشد.



مثال شبکه همبستگی نیست زیرا زیر شبکه

با شبکه (۲) گرفت است کافیه f را صورت زیر ترسیم کنیم



و یا شبکه همبستگی نیست زیرا

اگر شبکه (L, R) یک شبکه (L, R) است.
 مربع

اگر در هر شبکه (L, R) داریم:

$$\forall x, y, z \in L : (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$$

پس در هر شبکه (L, R) حذف توانم برقرار است یعنی برای هر $x, y, z \in L$ داریم:

$$\forall x : \begin{cases} x \wedge y = x \wedge z \\ x \vee y = x \vee z \end{cases} \rightarrow y = z$$

تعریف: شبکه (L, R) یک شبکه (L, R) است.

شبکه (L, R) را شبکه (L, R) می‌گویند اگر L دارای یک

و منظور از شبکه (L, R) یک شبکه (L, R) است که L دارای یک

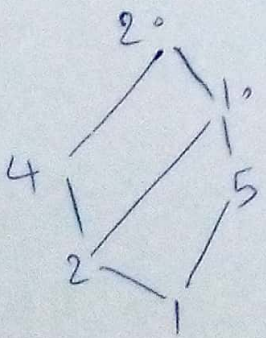
ماگر I و O (یا I و O) شبکه (L, R) است.

$$x \vee y = I, x \wedge y = O$$

توضیح: اگر I و O شبکه (L, R) است، x نیز شبکه (L, R) است.

اگر I و O شبکه (L, R) است، x نیز شبکه (L, R) است.

$$x \vee x' = I, x \wedge x' = O$$



مثال: در شبکه $(D_2, 1)$

$$1 \wedge 2 = 1, 1 \vee 2 = 2$$

$$5 \wedge 4 = 1, 5 \vee 4 = 2$$

مثال: در شبکه $(P(S), \subseteq)$

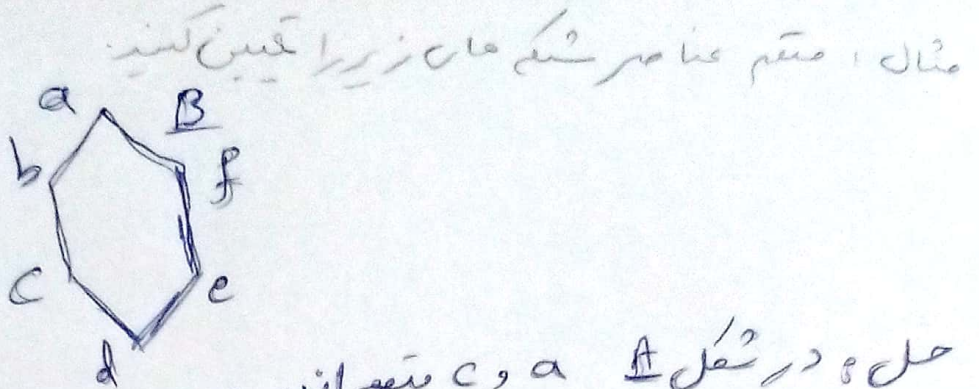
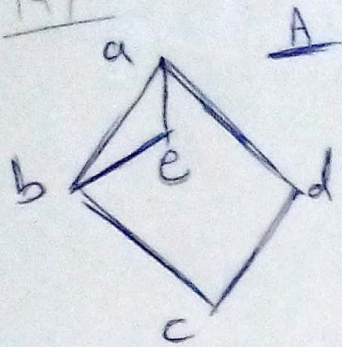
$$(S - X) \wedge X = \emptyset = O$$

$$(S - X) \vee X = S = I$$

مثال: در شبکه $(P(S), \subseteq)$

$$X' = S - X$$

پس این شبکه (L, R) است.



حل: در شکل A a و c متهم اند.
 $\Rightarrow$ b و d
 $\Rightarrow$ d و e

بنابرین شبکه A متهم پذیر است

در شکل B b و e متهم اند.
 $\Rightarrow$ b و f
 $\Rightarrow$ f و c
 $\Rightarrow$ c و e
 $\Rightarrow$ d و a

بنابرین شبکه B، متهم پذیر است

در مثال بالا، بینیم که متهم یک عضو لزوماً منحصر فرد نیست (در مثال فوق در شکل A عضو، دو متهم دارد و در شکل B نیز c چنین است).

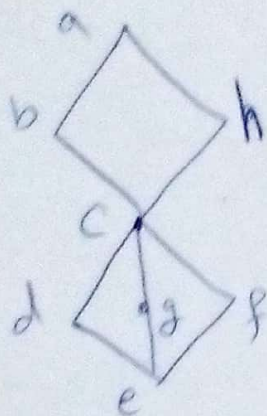
توضیح: اگر شبکه هر عضو، متهم داشته باشد (A) (متهم پذیر یا مکمل پذیر نامند) و اگر شبکه بخشی باشد، مکمل و عضو در صورت وجود منحصر فرد است بنابرین اگر در شبکه a عضو بیشتر از یک مکمل داشته باشد، بخشی نیست. بنابرین نمودارهای A و B در بالا خاصیت بخشی ندارند.

⑤ معلولاً جبر بول را با عبارات $\langle I, 0, 7, 8, B \rangle$ نشان می دهند. واضح است که در جبر بول هیچ هم بخشی و هم متهم پذیر است پس مکمل و عضو موجود و منحصر فرد است.

تعریف جبر مول

شبه (B, R) را یک جبر مول می نامیم هرگاه، منقسم پذیرد بخش باشد.

مثال: اگر M از شبه M زیر جبر مول است

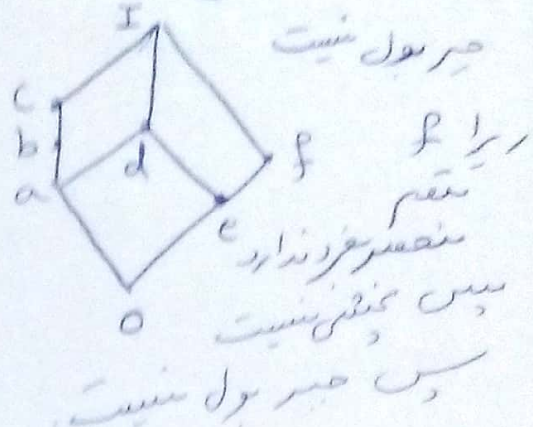


این شبه جبر مول نیست زیرا

بخشش نیست، زیرا

شبه M از M است

برگشت است



جبر مول نیست

یا

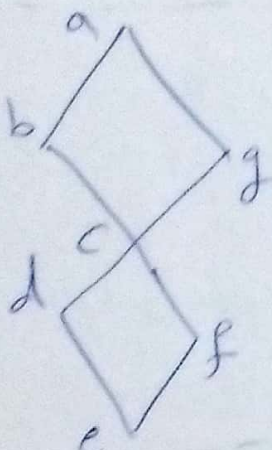
منقسم پذیرد ندارد

بخشش نیست

این شبه جبر مول نیست

زیرا منقسم پذیر نیست،

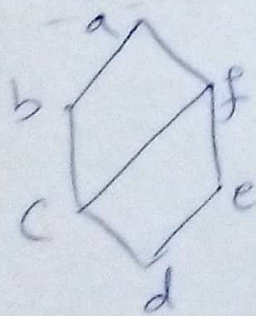
مطور $n = 6$ منقسم ندارد



این شبه جبر مول نیست زیرا

بخشش نیست، طور مثال

زیر شبه



شبه M برگشت است

یک جبر مول است

(D_{165})

$$\forall n \in D_{165} \quad n' = \frac{165}{n}$$

یک جبر مول نیست زیرا منقسم پذیر نیست

بخشش نیست، طور مثال $n = 6$ منقسم ندارد

الف) آمار جبر بول را با عبارات $\langle B, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ نشان می‌دهند.
 واضح است در جبر بول همه خاصیت محسوس و هم ششم به زیر برقرار است.
 ششم و هفتم مشخص می‌شود.

ب) در جبر بول $\vee$ با عبارات (جمع بول) معادل $\cup$ منطقی یا ترکیب فصل و $\wedge$ با عبارات $*$ یا $\cdot$ (ضرب بول) معادل and منطقی یا ترکیب عطفی نشان داده می‌شود. البته با این نیز علامت $*$ یا $\cdot$ (نقطه) نوشته می‌شود. این در جبر بول.

$x \vee y = x + y$ و $x \wedge y = x * y = x \cdot y = xy$
 و همچنین متغیرهای معادله با علامت نفی منطقی یا $+$ علامت برعکس یعنی قسم x با عبارات x' و $I=1$ و $0=0$ بنا برین

مسئله را ادلا اثبات کنید $(D_{70}, +)$ یک جبر بول است.
 تا اینجا مطلوب است $10 + 14$ و $10 * 14$ و $10'$.

حل: D_{70} یک جبر است $\Rightarrow x' = \frac{70}{x}$ $\forall x \in D_{70}$
 از طرف دیگر D_n با خاصیت محسوس دارند پس D_{70} یک جبر بول است.

$$10 + 14 = [10, 14] = 70$$

$$10 * 14 = (10, 14) = 2$$

$$[10, 7] = 70, [10, 7] = 70, [10, 7] = 70$$

$$10' = \frac{70}{10} = 7$$

مسئله را عرض کنید تا همکاران شما در شرکت ایران خودرو به عنوان طراح شبکه ها، منطق برای یک ماشین دنده اتوماتیک

به بر منتهی شود، باید شبیه حیا) مطرح شود که راسته و تقارن می
 بتواند مابین را ردی کند که دند و انوعا شیک در وضعیت خلاص یا
 دارک باشد و کمر نه این بسته باشد، اگر خلاص دند و در بار
 بود مابین و z ، بسته بود (کمر نه این بسته) عبارت اول این
 جدول شود

$$(x \vee y) \wedge z \quad \perp \quad (x + y) \cdot z \quad \perp \quad (x + y)z$$

خواص جبر بول

$$1' = 0, 0' = 1$$

$$x + x' = 1, x \cdot x' = 0 \quad \text{خاصیت عضو متضاد}$$

$$\left. \begin{aligned} x + 1 &= 1, x \cdot 1 = x \\ x + 0 &= x, x \cdot 0 = 0 \end{aligned} \right\} \text{تأثیر عضو یونیت}$$

$$(x')' = x \quad \text{قانون برعکس}$$

$$x + x = x \cdot x = x \quad \text{خواص توانی}$$

$$x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x \quad \text{جابجایی}$$

$$\left. \begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z = x + y + z \\ x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z \end{aligned} \right\} \text{شرکت پذیری}$$

$$\left. \begin{aligned} x(y + z) &= xy + xz \\ (x + y)(x + z) &= x + yz \end{aligned} \right\} \text{کنش}$$

$$(x + y)' = x' \cdot y', (xy)' = x' + y' \quad \text{دوگان}$$

$$x + x \cdot y = x \cdot (x + y) = x \quad \text{حذف}$$

$$0 R x, x R 1$$

$$x R y \iff x + y = y$$

$$x R y \iff x \cdot y = x$$

نکته: اگر G یک مجموعه متناهی باشد آنگاه $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ یک حیر بول است.

متناهی است، هر یک از تواناها (B, R) یک حیر بول است و G حقیقتاً مجموعه این تواناهاست و (B, R) یک حیر بول است.

حیر بول $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ یک حیریت است.

از آنجا که اگر G یک مجموعه n عضوی باشد، $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ به تعداد 2^n عضو

دارد پس هر حیر بول متناهی نیز باید تعداد اعضایش به صورت توان از 2

باشد مثلاً $2^1=2$ یا $2^2=4$ یا $2^3=8$ یا 2^n و ...

در این صورت این حیر بول را با تعداد B_n نشان می‌دهیم.

بنابراین اگر (B, R) یک حیریت متناهی باشد، (B, R) یک حیر بول است اگر

و تنها اگر عدد طبیعی n یافت شود بطوریکه B_n یک حیریت باشد.

معمولاً B_1 را فقط با تعداد 2 عضو B نشان می‌دهند

$n=1$: B_1 : 2 عضو

$n=2$: B_2 : 4 عضو

$n=3$: B_3 : 8

n : B_n : 2^n

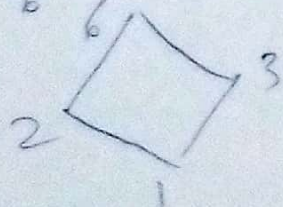
مثلاً (D_6) یک حیر بول است.

(D_6) یک حیریت است؛ $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ که

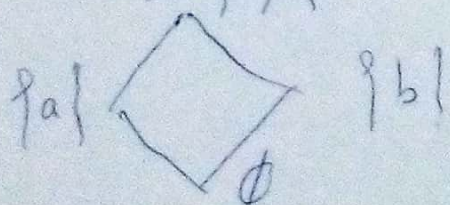
در آن S یک مجموعه 2 عضوی است مثل

$S = \{a, b\}$

$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

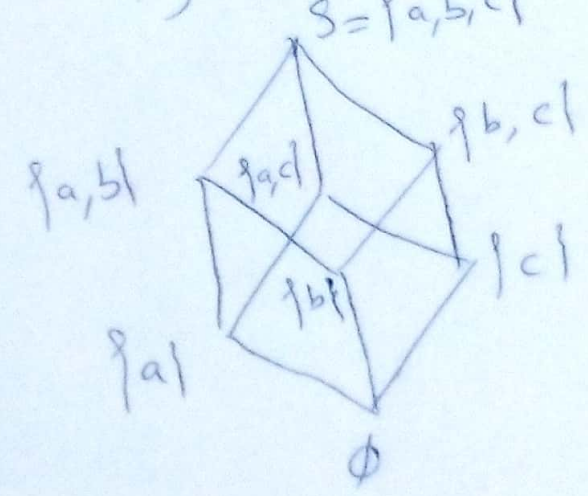
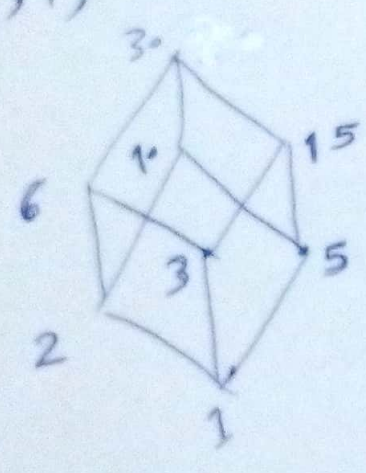


$(\mathcal{P}(S), \subseteq) = (\mathcal{P}(\{a, b\}), \subseteq)$
 $S = \{a, b\}$



۲.۱
 مثال ۱: $(D_3, 1)$ کے زیرِ مول قضا علی است و گیریت است $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$
 کہ در S کے مجموعہ سے عضوں میں $\{a, b, c\}$ قرار ہے
 $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$
 $S = \{a, b, c\}$

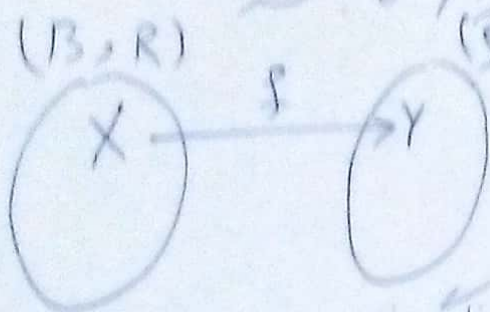
$(D_3, 1)$



نماینده از حالت کلی اثر (B, R) که صورتی متناهی باشد و این
تعداد اعداد n صورت 2^n برای یک عدد طبیعی n می باشد و در این
صورت یک مجموعه n عضو داشته و وجود دارد

کہ جبریل B_n ، (s, t) (مکینٹ، ٹیڈ) $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

باری و جود β بایرک، S سیرت
 $(P(S), C)$
 X سیرت

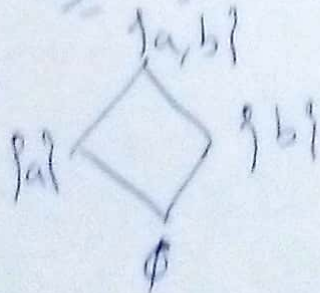
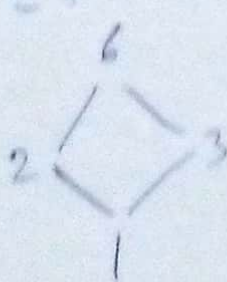


دوست تو را در آن خلافت پیش به صورتی در نظر گرفت

$$X = x_1, x_2, \dots, x_n$$

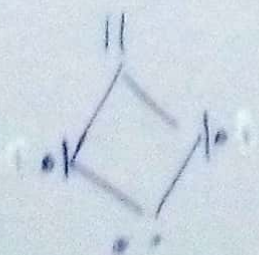
$$\alpha_i = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_i \in Y \\ a_i \notin Y \end{matrix}$$

مطابق مثال هر سه $(D_6, 1)$ و $(\mathbb{Z}_6, 1)$ و $(\mathbb{Z}_6, 2)$ حرکت است عاری



$$\begin{array}{lcl} 1 & \xrightarrow{f} & \phi \\ 2 & \longrightarrow & \{a\} \\ 3 & \longrightarrow & \{b\} \\ 6 & \longrightarrow & \{a, b\} \end{array}$$

خارجین ۱ غایت ۲۰۰ و ۲ غایت ۱۰۰ و ۳ غایت ۱۰۰ و ۴ غایت ۱۰۰
 ۱۱ دارد (میں ص ۱۰۰) D_6 را به صورت زیر غایت دارد ۱۱



و بطور مشابه سایر چیزهای متناهی چنین مفاسد دارند.

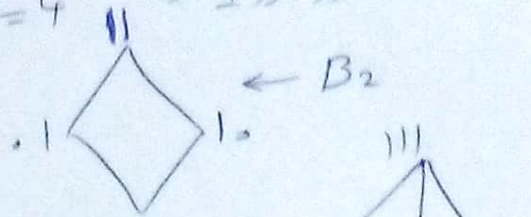
۲۰۳

تکین ابعاد آنها به صورت رشته ای از صفر و یک قابل نمایش است

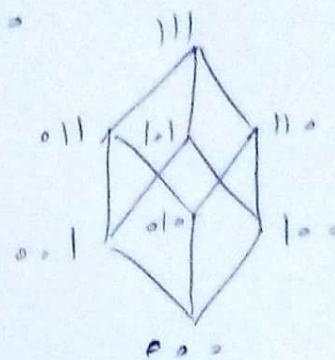
$$n=0 \Rightarrow B_n = B_0 \quad 2^0 = 1 \quad \text{صورت یک عضو}$$

$$n=1 \Rightarrow B_n = B_1 \quad 2^1 = 2 \quad \text{دو عضو}$$

$$n=2 \Rightarrow B_n = B_2 \quad 2^2 = 4 \quad \text{چهار عضو}$$



$$n=3 \Rightarrow B_n = B_3 \quad 2^3 = 8 \quad \text{هشت عضو}$$



می توانیم با این نمایش برای ابعاد صورت اول (B, R) را تعریف کنیم
 روی B_n می توانیم صورت زیر نمایش داد

$$\forall x, y \in B_n \quad x = x_1 x_2 \dots x_n$$

$$y = y_1 y_2 \dots y_n$$

$$x R y \iff \forall i, x_i \leq y_i$$

①
 مشخص

$$x \vee y = z = z_1 z_2 \dots z_n = x + y$$

$$z_i = \max\{x_i, y_i\}$$

$$x \wedge y = x y = z = z_1 \dots z_n$$

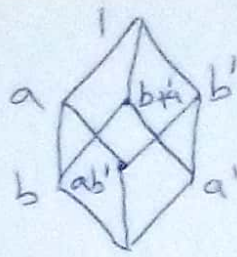
$$z_i = \min\{x_i, y_i\}$$

$$x' = z_1 \dots z_n$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & x_i = 1 \\ 0 & x_i = 0 \end{cases}$$

۲۰۴

اگر اعداد از موارد زیر یک حیرت



مثال فرض

است

الف، a و a'

حیرت نیست زیرا باید تعداد اعداد، توان از ۲ باشد.

ب، $\{a, a', b, b'\}$

یک حیرت نیست زیرا ۵ را ندارد

ج، $\{a, a', b, b'\}$

یک حیرت نیست زیرا ۵ و ۱ را ندارد

د، $\{a, a', b, b'\}$

یک حیرت است.

ه، $\{a, a', b, b'\}$

یک حیرت نیست زیرا حتمی عضو a را ندارد

مثال آخر $a = 0110$ و $b = 1010$ باشد،

ارک و تعیین کنید aRb یا bRa یا هیچکدام

پایه مقایسه $a + b$ ، $a \cdot b$ ، a' ، b' را تعیین کنید.

حل: اگر a و b را به صورت $a = a_1 a_2 a_3 a_4$ و $b = b_1 b_2 b_3 b_4$

$$aRb \iff \forall i, 1 \leq i \leq 4, a_i \leq b_i$$

پایه زیرین را می‌توانیم به شکل صحیح است.

پایه

$$a + b = 0110 + 1010 = 1111$$

$$a + b = c = c_1 c_2 c_3 c_4, \quad c_i = \max\{a_i, b_i\}$$

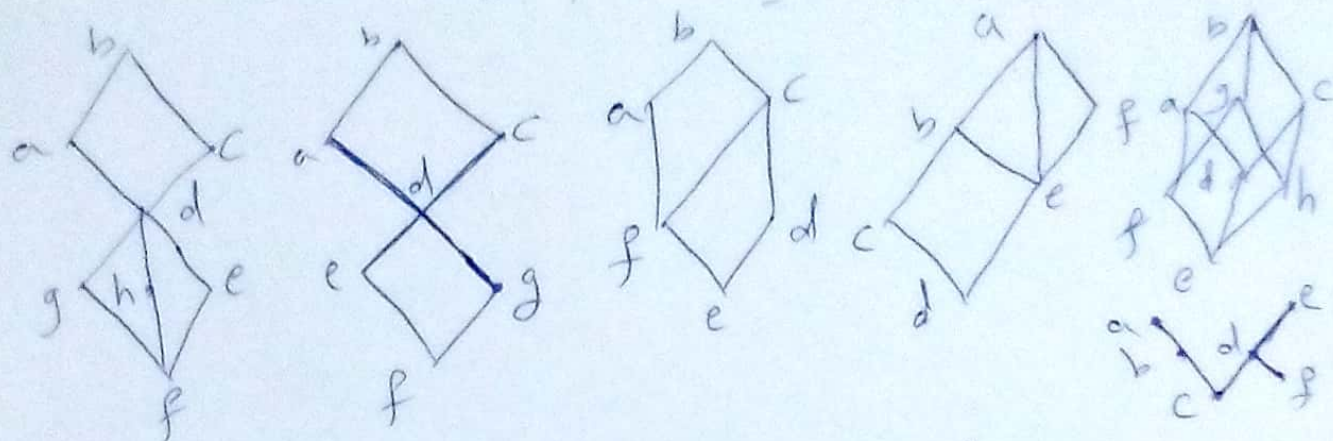
$$a \cdot b = 0110 \times 1010 = 0010$$

$$a \cdot b = a \cdot b = ab = c = c_1 c_2 c_3 c_4, \quad c_i = \min\{a_i, b_i\}$$

$$a' = (0110)' = 1001, \quad b' = (1010)' = 0101$$

$$a' = c = c_1 c_2 c_3 c_4, \quad c_i = \begin{cases} 0 & a_i = 1 \\ 1 & a_i = 0 \end{cases}$$

۱- کدامیک از مجموعه‌های مرتب زیر یک جبر بول را تشکیل می‌دهد



۲- ثابت کنید $(D_n, \wedge)$ یک جبر بول است اگر و تنها اگر

$$n = 2^k$$

یعنی اگر و تنها اگر n صورت حاصل ضربی از عوامل اول غیرتر از ۲ باشد.

۳- کدامیک از شبکه‌های زیر یک جبر بول است.

$$(D_{165}, \wedge), (D_3, \wedge), (D_2, \wedge), (D_{1.5}, \wedge), (D_{42}, \wedge), (D_{12}, \wedge), (D_{70}, \wedge), (D_{54}, \wedge)$$

۴- ثابت کنید در هر جبر بول (B, R)

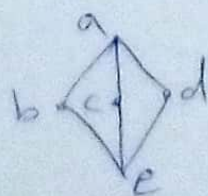
$$\forall a, b, c \in B$$

$$\begin{aligned} a \wedge (a \vee (b \wedge b')) &= b \\ (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) &= b \wedge c \\ ((a \vee c) \wedge (b' \vee c))' &= (a' \vee b) \wedge c' \end{aligned}$$

۵- یک شبکه مد در گفته می‌شود همواره برای a, b, c که $a \wedge c = b$ داشته باشیم

$$(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$$

الف، ثابت کنید هر شبکه مد در است.



۲۰۶

۶- ثابت کنید در هر جبر بول عبارتهای زیر هم ارزند

$$a + b = b \quad \text{الف}$$

$$ab = a \quad \text{ب}$$

$$a' + b = 1 \quad \text{ج}$$

$$ab' = 0 \quad \text{د}$$

۷- یک شکل قبل ثابت کنید در هر جبر بول

$$aRb \iff b'Ra'$$

۸- ثابت کنید هر شبکه متناهی محدود است.